HU Berlin Wintersemester 2013/14

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 27.01.2014 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 13 (40+5 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien V und W Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Die Matrix zu f bezüglich gewisser Basen von V und W ist durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bringen Sie A durch die elementaren Umformungen (S1), (S2), (S3) und (Z1), (Z2), (Z3) in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und geben Sie $\mathrm{rg}(A)$ an. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(V)$, $\dim_{\mathbb{R}}(W)$, $\dim_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{im}(f)\big)$ und $\dim_{\mathbb{R}}\big(\ker(f)\big)$.

Aufgabe 2 (10+5 Punkte)

Betrachten Sie für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die linearen Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die durch

$$f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \xi_1 + \alpha\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad g\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \beta(\xi_1 + \xi_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

(a) Bestimmen Sie die Matrix A von f und die Matrix B von g bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

(b) Berechnen Sie $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $B^2 = B \cdot B$ und $B^3 = B \cdot B^2$. Geben Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}, n > 0$, eine Formel für $A^n = A \cdot A^{n-1}$ und $B^n = B \cdot B^{n-1}$ an und beweisen Sie diese.

(c) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichheit $A \cdot B = B \cdot A$? Begründen Sie.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : V_3 \to V_3,$$

die durch $f\big(p(X)\big) = p'(X)$ definiert ist (siehe Serie 10, Aufgabe 1).

(a) Bestimmen Sie die f zugeordnete Matrix A bezüglich der geordneten Basen

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \big\{1, (1-X), (1-X)^2, (1-X)^3\big\}.$$

(b) Berechnen Sie $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$ und $A^4 = A \cdot A^3$. Welchen linearen Abbildungen von V_3 nach V_3 entsprechen diese Matrizen?

(c)* Es bezeichne $E \in M_4(\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix. Welcher Abbildung $g : V_3 \longrightarrow V_3$ entspricht die Matrix $E - A$? Beweisen Sie, dass $E - A$ invertierbar ist.
Hinweis: Berechnen Sie $(E - A) \cdot (E + A + A^2 + A^3)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Betrachten Sie drei Matrizen $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r,s}(\mathbb{R})$ und bestimmen Sie, für welche $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$ die Ausdrücke

$$(A \cdot B) \cdot C \quad \text{und} \quad A \cdot (B \cdot C)$$

definiert sind. Zeigen Sie, dass in den zutreffenden Fällen die Gleichheit

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

d.h. die Assoziativität der Matrixmultiplikation, gilt.

Hinweis: Auf der Vorlesungshomepage finden Sie als Vorbereitung auf die Klausur eine Probeklausur. Diese wird nicht korrigiert, kann aber in den Übungen besprochen werden.