HU Berlin Wintersemester 2009/10

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 01.02.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 14 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Stellen Sie die Permutationen $\pi_1, \pi_2 \in S_6$, welche durch die Zuordnungsvorschriften

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, als Produkt von Transpositionen dar. Geben Sie zudem die Zuordnungsvorschrift für die folgenden Permutationen an:

$$\pi_3 := \pi_1 \circ \pi_2, \quad \pi_4 := \pi_2 \circ \pi_1, \quad \pi_5 := \pi_1^{-1}, \quad \pi_6 := \pi_2^{-1}.$$

Bestimmen Sie weiter das Signum $\operatorname{sgn}(\pi_j)$ für $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\},$$

gegeben durch die Zuordnung $\pi \mapsto \operatorname{sgn}(\pi)$, ein *Homomorphismus* von Gruppen ist, d.h. dass die Gleichheit

$$\operatorname{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \operatorname{sgn}(\pi_1) \cdot \operatorname{sgn}(\pi_2) \quad (\pi_1, \pi_2 \in S_n)$$

besteht. Folgern Sie daraus, dass für $\pi \in S_n$ die Gleichheit $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen mit Hilfe der Leibnizschen Definition oder elementarer Umformungen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 9 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $A^t \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die zu A transponierte Matrix. Beweisen Sie, dass

$$\det(A) = \det(A^t)$$

gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Sei

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\,.$$

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit

$$\det(A_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2}$$

gilt.