Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 03.02.2014 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 14 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine allgemeine Formel für die Inverse A^{-1} einer Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).$$

(b) Wir betrachten in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ die Teilmenge der Drehmatrizen

$$K := \left\{ R_\varphi := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \middle| \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Beweisen Sie, dass K sogar eine Teilmenge von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für zwei Matrizen $R_\varphi, R_\psi \in K$ auch $R_\varphi \cdot R_\psi \in K$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus.

(iii) Berechnen Sie die Inverse R_φ^{-1} einer Matrix $R_\varphi \in K$ und zeigen Sie, dass R_φ^{-1} wieder in K liegt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Es seien nun

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$ und

$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$$

eine weitere Basis des $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Matrix zu f bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Gegeben sei die folgende Zuordnung zwischen den Buchstaben des Alphabets und den ganzen Zahlen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \ldots & \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \ldots & \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \ldots & \text{-2} & \text{-1} & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & \ldots \end{array}$$

Mit Hilfe der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$
wird eine in Dreierblöcke aufgeteilte Nachricht wie folgt verschlüsselt: Zunächst werden die Buchstaben mit Hilfe obiger Zuordnung in Zahlen verwandelt, die Dreierblöcke als Vektoren $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ aufgefasst und mit der Matrix A multipliziert. Die Einträge der Vektoren $A \cdot X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ werden nun wieder mit Hilfe obiger Zuordnung in Buchstaben verwandelt. Wir erhalten die Nachricht

AMDQFOEILISY

Wie lautet der ursprüngliche Text?

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Es seien V, W Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Ist f injektiv, so gilt $\dim_{\mathbb{R}}(V) \leq \dim_{\mathbb{R}}(W)$.

(b) Ist f surjektiv, so gilt $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geq \dim_{\mathbb{R}}(W)$.