

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 20.10.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten:

JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.

JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 1 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien X und Y zwei Mengen. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *injektiv*, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, dass $x_1 = x_2$ gilt. Die Abbildung heißt *surjektiv*, wenn für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert. Eine Abbildung, die sowohl surjektiv als auch injektiv ist, heißt *bijektiv*.

- a) Finden Sie eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$. Hierbei bezeichne $2\mathbb{N}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen.
- b) Finden Sie eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.
- c) Finden Sie eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Hierbei bezeichne $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ den Einheitskreis.
- d) Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$?
- e) Gibt es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmenge $\mathcal{R}_n := \{0, \dots, n-1\}$ der ersten n natürlichen Zahlen. Auf der Menge $\mathcal{R}_n$ können wir wie folgt zwei Verknüpfungen einführen:

Dazu bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Rest einer natürlichen Zahl c nach Division durch n mit $R_n(c)$; es gilt $R_n(c) \in \mathcal{R}_n$. Für zwei Zahlen $a, b \in \mathcal{R}_n$ setzen wir jetzt:

$$\begin{aligned}\oplus : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n &\rightarrow \mathcal{R}_n, & \text{gegeben durch } (a, b) &\mapsto a \oplus b := R_n(a + b); \\ \odot : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n &\rightarrow \mathcal{R}_n, & \text{gegeben durch } (a, b) &\mapsto a \odot b := R_n(a \cdot b).\end{aligned}$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ assoziativ sind.
- (b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{R}_n, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. Geben Sie die Gruppentafel für $(\mathcal{R}_6, \oplus)$ an.
- (c) Für welche $a \in \mathcal{R}_9$ gibt es ein $b \in \mathcal{R}_9$, so dass $a \odot b = 1$ gilt? Begründen Sie.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Finden Sie alle Lösungen $x, y, z \in \mathbb{R}$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 1, \\4x + 5y + 6z &= -2, \\7x + 8y + 9z &= -5.\end{aligned}$$

Für eine natürliche Zahl $n > 0$ sei die Menge $\mathcal{R}_n$ mit den Verknüpfungen „ $\oplus$ “ und „ $\odot$ “ wie in Aufgabe 2 gegeben.

(b) Finden Sie alle Lösungen $x, y \in \mathcal{R}_9$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}4 \odot x \oplus 2 \odot y &= 6, \\5 \odot x \oplus 4 \odot y &= 8.\end{aligned}$$

(c) Finden Sie alle Lösungen $x, y \in \mathcal{R}_{12}$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}7 \odot x \oplus 4 \odot y &= 3, \\5 \odot x \oplus 2 \odot y &= 9.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (0 Punkte)

Lernen Sie das griechische Alphabet, bzw. rufen Sie sich dieses wieder in Erinnerung!

Buchstabe	Name	Buchstabe	Name
α A	Alpha	ν N	Ny
β B	Beta	ξ Ξ	Xi
γ Γ	Gamma	$\omicron$ O	Omikron
δ Δ	Delta	π Π	Pi
ε E	Epsilon	ρ P	Rho
ζ Z	Zeta	σ Σ	Sigma
η E	Eta	τ T	Tau
ϑ Θ	Theta	υ Υ	Ypsilon
ι I	Iota	φ Φ	Phi
κ K	Kappa	χ X	Chi
λ Λ	Lambda	ψ Ψ	Psi
μ M	My	ω Ω	Omega

Kennen Sie die folgenden Mathematiker:

$\Theta\alpha\lambda\tilde{\eta}\varsigma$, $\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma\acute{o}\rho\alpha\varsigma$, $\Pi\lambda\acute{\alpha}\tau\omega\nu$, Ἀριστοτέλης , Εὐκλείδης , Ἀρχιμήδης , $\Delta\acute{\iota}\phi\alpha\nu\tau\omicron\varsigma$?

Hinweis: Am Wortende wird der Buchstabe σ durch den Buchstaben ς ersetzt.