

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 20.04.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten:**JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.****JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.****Serie 1 (30 Punkte)****Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Es seien n, m, p beliebige natürliche Zahlen. Beweisen Sie auf Grundlage der Peano-Axiome die folgenden Rechengesetze:

- Assoziativgesetz der Multiplikation:

$$n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p.$$

- Kommutativgesetz der Multiplikation:

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

- Distributivgesetz:

$$p \cdot (n + m) = (p \cdot n) + (p \cdot m).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

- (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2.$$

- (b) Eine Gerade zerlegt die Ebene in zwei Gebiete. Beweisen Sie, dass n Geraden die Ebene in höchstens $\frac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage auf Grundlage der Peano-Axiome: Das Produkt zweier natürlicher Zahlen m und n ist genau dann gleich 0, wenn mindestens eine der beiden Zahlen gleich 0 ist.