HU Berlin Wintersemester 2010/11

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 01.11.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 1 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Sei S_n ($n \in \mathbb{N}$) die symmetrische Gruppe. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\},$$

gegeben durch die Zuordnung $\pi \mapsto \operatorname{sgn}(\pi)$, ein Homomorphismus von Gruppen ist, d.h. dass die Gleichheit

$$\operatorname{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \operatorname{sgn}(\pi_1) \cdot \operatorname{sgn}(\pi_2) \quad (\pi_1, \pi_2 \in S_n)$$

besteht. Folgern Sie daraus, dass für $\pi \in S_n$ die Gleichheit $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$ gilt.

(b) Stellen Sie die Permutationen $\pi_1, \pi_2 \in S_6$, welche durch die Zuordnungsvorschriften

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, als Produkt von Transpositionen dar. Geben Sie zudem die Zuordnungsvorschrift für die folgenden Permutationen an:

$$\pi_3 := \pi_1 \circ \pi_2, \quad \pi_4 := \pi_2 \circ \pi_1, \quad \pi_5 := \pi_1^{-1}, \quad \pi_6 := \pi_2^{-1}.$$

Bestimmen Sie weiter das Signum $\operatorname{sgn}(\pi_j)$ für $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass Untergruppen vom Index 2 Normalteiler sind. Folgern Sie daraus, dass die alternierende Gruppe A_n ($n > 1$) ein Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_n ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie:

a) Das Zentrum $Z(G)$ von G ist ein Normalteiler von G.

b) Der Normalisator $N_G(H)$ von H in G ist eine Untergruppe von G.

c) Die Untergruppe H ist Normalteiler in $N_G(H)$.

d) Falls es eine Untergruppe $H' \leq G$ gibt, so dass $H \leq H'$ Normalteiler ist, so gilt $H' \leq N_G(H)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge der Automorphismen von G. Zeigen Sie:

(a) Die Menge der Automorphismen $\mathrm{Aut}(G)$ bildet bezüglich der Komposition eine Gruppe und die Abbildung

$$G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G),$$

gegeben durch $a \mapsto \varphi_a$ mit $\varphi_a(g) := aga^{-1}$ $(g \in G)$, ist ein Homomorphismus. (φ_a heißt *innerer Automorphismus*).

(b) Für $G = S_3$ ist der Homomorphismus aus Teil (a) sogar ein Isomorphismus.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass jede nicht-abelsche Gruppe G mindestens sechs Elemente besitzt.
Hinweis: Entweder Sie beweisen, dass alle Gruppen niedrigerer Ordnung abelsch sind oder Sie wählen den Ansatz, dass für eine nicht-abelsche Gruppe G mit den drei Elementen e, a, b die Elemente e, a, b, ab, ba paarweise verschieden sind, es allerdings noch mindestens eines weiteren Elements bedarf, um G zu einer Gruppe zu machen.