Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 03.05.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 2 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}),$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_5).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $P : V \longrightarrow V$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$ gilt. Es sei eine solche Projektion P gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von P entweder 0 oder 1 sind.

(b) Zeigen Sie, dass V gleich der direkten Summe von Bild und Kern von P ist, d.h. $V = \mathrm{im}(P) \oplus \ker(P)$.

(c) Folgern Sie, dass P diagonalisierbar ist.

(d) Welche Möglichkeiten gibt es für das Minimalpolynom von P? Begründen Sie.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ mit charakteristischem Polynom $p_A(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$a_n = (-1)^n, \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A), \quad a_0 = \det(A)$$

gilt. Hierbei ist die Spur $\mathrm{tr}(A)$ von $A = (\alpha_{j,k})_{j,k=1,\ldots,n} \in \mathrm{M}_n(K)$ die Summe der Diagonaleinträge von A, d.h.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,j}.$$

(b) Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(t)$ von A im algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K (mit Vielfachheiten gezählt). Zeigen Sie:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j, \quad \det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

(c) Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Stellen Sie die Inverse A^{-1} von A als Linearkombination der Matrizen $E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ dar.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Cayley-Hamilton.

(d) Es sei $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass A mindestens einen reellen Eigenwert hat.