Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 26.10.2009 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 2 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Was ist ein lineares Gleichungssystem? Was ist eine Lösung eines linearen Gleichungssystems?

(b) Sei $k \in \mathbb{R}$ eine reelle Konstante. Welche der vier Gleichungen

$$x_1 - x_2 + x_3 = \sin(k), \tag{1}$$
$$kx_1 - \frac{1}{k}x_2 = 9, \tag{2}$$
$$2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \tag{3}$$
$$x_1^k + x_2 + x_3 = 0 \tag{4}$$

ist eine lineare Gleichung in x_1, x_2, x_3?

(c) Gibt es lineare Gleichungssysteme mit genau zwei reellen Lösungen? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Damit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ 2x & + & y & + & 3z & = & c \end{array}$$

lösbar ist, muss $a + b = c$ gelten.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array}$$

in Abhängigkeit des reellen Parameters $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass das Ersetzen einer Gleichung eines linearen Gleichungssystems durch ein von Null verschiedenes Vielfaches dieser Gleichung die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändert.

(b) Beweisen Sie, dass sich das Vertauschen zweier Gleichungen eines linearen Gleichungssystems auch mit Hilfe des Multiplizierens einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen reellen Zahl und des Addierens zweier Gleichungen dieses Gleichungssystems erreichen lässt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 10y & + & 12z & = & 28 \\ 2x & - & 5y & - & 5z & = & -1 \\ & - & 2y & + & 7z & = & 12 \end{array}$$

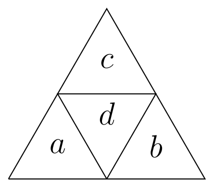
(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\xi_1 & + & 4\xi_2 & + & 2\xi_3 & = & -12 \\ 2\xi_1 & + & 12\xi_2 & + & 7\xi_3 & = & -5 \\ \xi_1 & + & 10\xi_2 & + & 6\xi_3 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 5* (10 Punkte)
In einem „magischen Sierpinski-Dreieck"



soll die Summe der Einträge dreier Dreiecke, die jeweils ein Trapez bilden, gleich einer vorgegebenen natürlichen Zahl n sein.
Bestimmen Sie bei vorgegebenem $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen a, b, c, d mit dieser Eigenschaft.