HU Berlin Sommersemester 2010

# Übungsaufgaben zur Vorlesung
# Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 26.04.2010 vor der Vorlesung

**Bitte beachten:**
**JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.**
**JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.**

## Serie 2 (40 Punkte)

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $A$ kann durch eine Folge von elementaren Zeilenumformungen auf die $n$-reihige Einheitsmatrix reduziert werden.

(ii) $A$ ist als Produkt von Elementarmatrizen darstellbar.

(iii) $A$ ist regulär.

(iv) Das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ zwei quadratische Matrizen. Zeigen Sie, dass dann

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

gilt.

*Hinweis*: Unterscheiden Sie die Fälle „$A$ regulär“ und „$A$ singulär“ und verwenden Sie die Charakterisierung regulärer Matrizen aus Aufgabe 1. Beweisen Sie die Produktformel im Fall „$A$ regulär“ zunächst unter der Annahme, dass $A$ eine Elementarmatrix ist, und wenden Sie dann vollständige Induktion an.

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Berechnen Sie die reellen Eigenwerte der folgenden Matrizen:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

(b)

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**

Seien $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung und $v, w \in V$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, resp., mit $\lambda \neq \mu$. Zeigen Sie, dass $v$ und $w$ linear unabhängig sind.