Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 27.04.2011 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 2 (60 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Für die Relation „$<$“ gelten in Bezug auf Addition und Multiplikation folgende Regeln:

(a) Für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt mit $m < n$ auch $m + p < n + p$.

(b) Für alle $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, gilt mit $m < n$ auch $m \cdot p < n \cdot p$.

Beweisen Sie die Eigenschaften (a) und (b) mit Hilfe vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Differenz $m - n$ zweier natürlicher Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ wohldefiniert ist, d.h. dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Gleichung $n+x = m$ erfüllt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Grundtatsachen zur Teilbarkeitsbeziehung natürlicher Zahlen:

(a) $b \cdot c \,|\, a \cdot c \Rightarrow b \,|\, a \quad (a,\, b,\, c \in \mathbb{N};\; b,\, c \neq 0)$.

(b) $b_1 \,|\, a_1,\; b_2 \,|\, a_2 \Rightarrow b_1 \cdot b_2 \,|\, a_1 \cdot a_2 \quad (a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2 \in \mathbb{N};\; b_1,\, b_2 \neq 0)$.

(c) $b \,|\, a_1,\; b \,|\, a_2 \Rightarrow b \,|\, (c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2) \quad (a_1,\, a_2,\, c_1,\, c_2,\, b \in \mathbb{N};\; b \neq 0)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es seien $a_1, \ldots, a_k$ natürliche Zahlen. Ferner sei bekannt, dass $a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + 1$ durch 3 teilbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass keine der Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ durch 3 teilbar ist.

(b) Beweisen Sie, dass wenigstens eine der Zahlen $a_1 + 1, \ldots, a_k + 1$ durch 3 teilbar ist.

(c) Nutzen Sie die Beweisidee von Euklid und (b), um zu zeigen, dass es sogar in der Teilmenge der natürlichen Zahlen

$$2 + 3 \cdot \mathbb{N} := \{2,\; 2+3,\; 2+6, \ldots,\; 2+3 \cdot n, \ldots\}$$

unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Eine Primzahl der Form $p = 2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt *Mersennesche Primzahl*. Zeigen Sie: Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist auch n eine Primzahl. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Eine natürliche Zahl n heißt *vollkommen*, falls die Summe all ihrer Teiler $2n$ ergibt, d.h. falls

$$\sum_{d|n} d = 2n$$

gilt. Beweisen Sie folgende Charakterisierung gerader vollkommener Zahlen, die auf L. Euler zurückgeht: Eine natürliche Zahl n ist genau dann eine gerade vollkommene Zahl, wenn $n = 2^m \cdot (2^{m+1} - 1)$ mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$ ist, wobei $2^{m+1} - 1$ eine Primzahl ist.