

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Dr. Anna v. Pippich

Abgabetermin: 22.04.2013 vor der Vorlesung

Bitte beachten:**JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.****JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.****Serie 2 (40+10 Punkte)****Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Für die Relation „ $<$ “ gelten in Bezug auf Addition und Multiplikation folgende Regeln:

- (i) Für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt mit $m < n$ auch $m + p < n + p$.
- (ii) Für alle $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, gilt mit $m < n$ auch $m \cdot p < n \cdot p$.

Beweisen Sie die Eigenschaften (i) und (ii) mit Hilfe vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Grundtatsachen zur Teilbarkeitsbeziehung natürlicher Zahlen:

- (i) $b \cdot c \mid a \cdot c \Rightarrow b \mid a$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$; $b, c \neq 0$).
- (ii) $b_1 \mid a_1, b_2 \mid a_2 \Rightarrow b_1 \cdot b_2 \mid a_1 \cdot a_2$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$; $b_1, b_2 \neq 0$).
- (iii) $b \mid a_1, b \mid a_2 \Rightarrow b \mid (c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2)$ ($a_1, a_2, c_1, c_2, b \in \mathbb{N}$; $b \neq 0$).

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es bezeichne p_n die n -te Primzahl ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$). Beweisen Sie, dass für $n \geq 2$ die folgende Abschätzung gilt:

$$p_n < 2^{2^{n-1}}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Beweisidee von Euklid zur Existenz unendlich vieler Primzahlen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es seien a_1, \dots, a_k natürliche Zahlen. Ferner sei bekannt, dass $a_1 \cdot \dots \cdot a_k + 1$ durch 3 teilbar ist.

- (a) Zeigen Sie, dass keine der Zahlen a_1, \dots, a_k durch 3 teilbar ist.
- (b) Beweisen Sie, dass wenigstens eine der Zahlen $a_1 + 1, \dots, a_k + 1$ durch 3 teilbar ist.

- (c) Nutzen Sie die Beweisidee von Euklid und (b), um zu zeigen, dass es sogar in der Teilmenge der natürlichen Zahlen

$$2 + 3 \cdot \mathbb{N} := \{2, 2 + 3, 2 + 6, \dots, 2 + 3 \cdot n, \dots\}$$

unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Differenz $m - n$ zweier natürlicher Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ wohldefiniert ist, d.h. dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Gleichung $n + x = m$ erfüllt.
- (b) Wählen Sie eine beliebige dreistellige natürliche Zahl und schreiben Sie diese zweimal hintereinander, um eine sechsstellige natürliche Zahl zu erhalten. Welche Zahl erhält man, wenn man diese sechsstellige Zahl durch 7 dividiert, dann das Ergebnis durch 11 und das Ergebnis hiervon durch 13? Begründen Sie Ihre Antwort!