HU Berlin Wintersemester 2013/14

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 28.10.2013 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 2 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Was ist ein lineares Gleichungssystem? Was ist eine Lösung eines linearen Gleichungssystems?

(b) Sei $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eine reelle Konstante. Welche der vier Gleichungen

$$x_1 - x_2 + x_3 = \sin(k), \tag{1}$$

$$kx_1 - \frac{1}{k}x_2 = 9, \tag{2}$$

$$2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \tag{3}$$

$$x_1^k + x_2 + x_3 = 0 \tag{4}$$

ist eine lineare Gleichung in x_1, x_2, x_3?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Welche Beziehung muss zwischen a, b und c gelten, damit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & b \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & c \end{array}$$

lösbar ist?

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} (\lambda+1)\,x_1 & + & (-\lambda^2+6\,\lambda-9)\,x_2 & + & (\lambda-2)\,x_3 & = & 1 \\ (\lambda^2-2\,\lambda-3)\,x_1 & + & (\lambda^2-6\,\lambda+9)\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & \lambda-3 \\ (\lambda+1)\,x_1 & + & (-\lambda^2+6\,\lambda-9)\,x_2 & + & (\lambda+1)\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

keine, genau eine, mehr als eine Lösung?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass das Ersetzen einer Gleichung eines linearen Gleichungssystems durch ein von Null verschiedenes Vielfaches dieser Gleichung die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändert.

(b) Beweisen Sie, dass sich das Vertauschen zweier Gleichungen eines linearen Gleichungssystems auch mit Hilfe des Multiplizierens einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen reellen Zahl und des Addierens zweier Gleichungen dieses Gleichungssystems erreichen lässt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 10y & + & 12z & = & 28 \\ 2x & - & 5y & - & 5z & = & -1 \\ & - & 2y & + & 7z & = & 12 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\xi_1 & + & 4\xi_2 & + & 2\xi_3 & = & -12 \\ 2\xi_1 & + & 12\xi_2 & + & 7\xi_3 & = & -5 \\ \xi_1 & + & 10\xi_2 & + & 6\xi_3 & = & 1 \end{array}$$