Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 08.11.2010 in der Vorlesung

Serie 2 (40 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Sei $G := D_4$ die Symmetriegruppe des Quadrates, d.h. die Diedergruppe der Ordnung 8. Bestimmen Sie den Stabilisator von einem Eckpunkt, einer Seite sowie einer Diagonalen des Quadrates.

(b) Es operiere die Gruppe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf der Menge $M := \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ durch Konjugation, d.h. die Operation ist gegeben durch

$$(g, m) \mapsto g \bullet m := g \cdot m \cdot g^{-1} \qquad (g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), m \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))\,.$$

Bestimmen Sie alle Bahnen dieser Operation.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es gibt vier eindimensionale Unterräume in $\mathbb{F}_3^2$. Die Multiplikation einer Matrix $A \in G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ permutiert diese Unterräume. Dadurch operiert die Gruppe G auf der Menge der Unterräume in $\mathbb{F}_3^2$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Operation einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \longrightarrow S_4$ induziert.

(b) Bestimmen Sie den Kern $\ker(\varphi)$ und das Bild $\mathrm{im}(\varphi)$ von φ sowie die Ordnung $|G|$ von G.

(c) Es seien die Untergruppen

$$N = \{A \in G \,|\, \det A = 1, A^2 = \pm I_2\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{F}_3, b \neq 0 \right\}$$

von G gegeben. Zeigen Sie, dass $G = HN$ gilt. (*Hinweis*: 1. Isomorphiesatz).

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung p^n für eine Primzahl p und natürliches $n \geq 1$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Das Zentrum von G ist nicht-trivial.

(b) Im Falle $n = 2$ ist G eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 100$. Zeigen Sie, dass G eine normale Untergruppe H der Ordnung $|H| = 25$ besitzt. (*Hinweis:* Sylowsätze).

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Sei $V_4 = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(32)\} \leq S_4$ die Kleinsche Vierergruppe. Beweisen Sie, dass V_4 Normalteiler in S_4 ist und folgende Isomorphie besteht:

$$S_4/V_4 \cong S_3.$$