HU Berlin Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 10.05.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 3 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p_{A_j}(t)$ und das Minimalpolynom $m_{A_j}(t)$ von A_j $(j = 1, 2)$.

(b) Berechnen Sie die Eigenräume und die Haupträume von A_j $(j = 1, 2)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine Matrix, die die Gleichung $-A^4 = 2A^2 + E$ erfüllt. Zeigen Sie, dass n dann gerade sein muss und finden Sie eine solche Matrix A.

(b) Es sei $B \in \mathrm{M}_{m+n}(K)$ von der Form

$$B = \begin{pmatrix} B' & C \\ 0 & B'' \end{pmatrix},$$

mit $B' \in \mathrm{M}_m(K)$, $B'' \in \mathrm{M}_n(K)$, $C \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $0 \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ der $n \times m$-Nullmatrix. Zeigen Sie für die charakteristischen Polynome von B, B' und B'' die Beziehung

$$p_B(t) = p_{B'}(t) \cdot p_{B''}(t).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{L}(V)$ mit $f^d = 0$, $f^{d-1} \neq 0$.

(a) Wir betrachten die aufsteigende Kette von Unterräumen

$$0 = \mathrm{im}(f^d) \subseteq \mathrm{im}(f^{d-1}) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{im}(f^2) \subseteq \mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{im}(f^0) = \mathrm{im}(\mathrm{id}_V) = V.$$

Zeigen Sie, dass die Kette echt aufsteigend ist, dass also $\mathrm{im}(f^j) \subsetneq \mathrm{im}(f^{j-1})$ ($j = 1, \ldots, d$) gilt.

(b) Bestimmen Sie nun eine Basis $\mathcal{B}$ von V derart, dass die Matrix A von f bezüglich $\mathcal{B}$ strikte obere Dreiecksform hat, also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor: Wählen Sie eine Basis von $\mathrm{im}(f^{d-1})$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathrm{im}(f^{d-2})$ usw., bis Sie eine Basis von V erhalten. Ordnen Sie diese geeignet. Begründen Sie, warum A nun die gewünschte Form hat.