Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 03.05.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 3 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben seien die 3×3-Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_i $(i = 1, 2, 3)$, ihre algebraische und geometrische Vielfachheit sowie Basen der zugehörigen Eigenräume. Entscheiden Sie weiter, ob A_i $(i = 1, 2, 3)$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ von A ein Polynom von Grad n ist, d.h.

$$p_A(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$a_n = (-1)^n, \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A), \quad a_0 = \det(A)$$

gilt. Hierbei ist die Spur $\operatorname{tr}(A)$ von $A = (\alpha_{j,k})_{j,k=1,\ldots,n} \in M_n(\mathbb{R})$ die Summe der Diagonaleinträge von A, d.h.

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,j}.$$

Aufgabe 3 (10+5 Punkte)

Es sei $f_A \in L(\mathbb{R}^2)$ die durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

(b) Welches ist die Matrix A' von f_A bzgl. dieser Basis? Bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

(c) Benutzen Sie (b), um A^n für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen!

(d)* Wenden Sie (c) auf folgendes Problem an: Die Fibonacci-Folge $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ist definiert durch $\xi_1 = \xi_2 = 1$ und $\xi_{n+1} = \xi_n + \xi_{n-1}$. Geben Sie eine explizite Formel für ξ_n an und berechnen Sie ξ_{10} und ξ_{20}.

*H*inweis: Man schreibe die Rekursionsrelation als Matrixgleichung für $\begin{pmatrix} \xi_n \\ \xi_{n+1} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 (10+5 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\mathrm{rg}(A) < n$ genau dann, wenn 0 ein Eigenwert von A ist.

(b) Wenn λ Eigenwert von A ist, dann ist λ^k Eigenwert von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.
Folgt auch umgekehrt aus der Eigenschaft „λ^{k_0} ist Eigenwert von A^{k_0} für ein $k_0 \in \mathbb{N}$“, dass λ Eigenwert von A ist?

(c)* Wenn $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist jeder Eigenwert von A gleich 0.