Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 15.11.2010 in der Vorlesung

Serie 3 (40 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung 2000.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei B eine abelsche Gruppe der Ordnung p^r (p Primzahl, $r \in \mathbb{N}_{>0}$). Dann besteht gemäß Vorlesung eine Isomorphie

$$B \cong \mathbb{Z}/p^{s_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{s_\ell}\mathbb{Z}$$

mit $s_1 + ... + s_\ell = r$ und $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_\ell > 0$. Beweisen Sie, dass die Partition $(s_1, ..., s_\ell)$ von r durch den Isomorphietyp von B eindeutig festgelegt ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Gruppe $p \cdot B$ und wenden Sie vollständige Induktion an).

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie explizit eine Umkehrabbildung des Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/89081\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/229\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/389\mathbb{Z},$$

welcher durch die Zuordnung

$$a \bmod 89081 \mapsto (a \bmod 229, a \bmod 389)$$

gegeben ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Seien A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $A_{\mathrm{tor}} := \{a \in A \,|\, \mathrm{ord}(a) < \infty\}$ die Menge der sogenannten Torsionselemente von A.

(a) Zeigen Sie, dass A_{tor} eine endliche abelsche Untergruppe von A ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe A/A_{tor} torsionsfrei ist.

(c) Bestimmen Sie A_{tor}, falls A eine (endliche oder unendliche) zyklische Gruppe ist.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass jede endliche Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zyklisch ist. Zeigen Sie weiter, dass für ein natürliches n genau eine Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ existiert, welche isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist.