Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Dr. Anna v. Pippich

Abgabetermin: 29.04.2013 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 3 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Verifizieren Sie, dass man mit dem Verfahren aus der Vorlesung nicht alle Primzahlen erhält. Definieren Sie dazu die Zahlen $a_1 := 2$ und $a_{n+1} := (a_n - 1) \cdot a_n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) und betrachten Sie die Mengen von Primzahlen

$$\mathcal{M}_n := \{p \in \mathbb{P} \mid p \,|\, a_n\} \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1).$$

Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}, n \geq 1} \mathcal{M}_n \neq \mathbb{P}$ gilt, indem Sie $5 \notin \mathcal{M}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, nachweisen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Finden Sie die Primfaktorzerlegungen der Zahlen 360, 8 989, 720^{720} und $2^{64} - 1$.

(b) Bestimmen Sie die größten gemeinsamen Teiler $(7\,200, 6\,480)$, $(720^{720}, 900^{360})$ und $(2^{64} - 1, 4^8 - 3^8)$.

(c) Bestimmen Sie die kleinsten gemeinsamen Vielfachen $[7\,200, 6\,480]$, $[720^{720}, 900^{360}]$ und $[2^{64} - 1, 4^8 - 3^8]$.

(d) Finden Sie drei natürliche Zahlen a_1, a_2, a_3, die teilerfremd, aber nicht paarweise teilerfremd sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Betrachten Sie die *Fermatschen Zahlen* $F_m := 2^{(2^m)} + 1$ ($m \in \mathbb{N}$).

(a) Zeigen Sie, dass $F_m - 2 = F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{m-1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, gilt.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (a), dass die Zahlen F_m ($m \in \mathbb{N}$) paarweise teilerfremd sind.

(c) Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, indem Sie die unendliche Folge $1 < F_0 < F_1 < \ldots < F_m < F_{m+1} < \ldots$ betrachten.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Es sei $n = g_\ell \cdot 10^\ell + \ldots + g_2 \cdot 10^2 + g_1 \cdot 10 + g_0$ $(0 \leq g_j \leq 9;\ j = 0, \ldots, \ell)$ die Dezimaldarstellung von n. Dann heißt

$$Q(n) = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_\ell$$

Quersumme von n,

$$Q_a(n) = g_0 - g_1 + g_2 - g_3 + \ldots + (-1)^\ell g_\ell$$

alternierende Quersumme von n und

$$Q_{3a}(n) = (g_0 + g_1 \cdot 10 + g_2 \cdot 10^2) - (g_3 + g_4 \cdot 10 + g_5 \cdot 10^2) \pm \ldots$$

alternierende 3-*Block-Quersumme von n*. Zeigen Sie:

(a) n ist genau dann durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 3 bzw. 9 teilbar ist.

(b) n ist genau dann durch 11 teilbar, wenn $Q_a(n)$ durch 11 teilbar ist.

(c) n ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $Q_{3a}(n)$ durch 7 teilbar ist.