HU Berlin Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 17.05.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 4 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Jordansche Normalform folgender Matrizen bzw. linearer Abbildungen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_5),$$

$$f_3 : \mathbb{R}[X]_{\leq 4} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 4}, \text{ gegeben durch } f_3(g) = g''.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

a) Zeigen Sie: Ist $n \in \{1, 2, 3\}$, so bestimmen charakterisches Polynom und Minimalpolynom die Jordansche Normalform von A eindeutig bis auf Permutation der Jordanblöcke.

b) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage für $n = 4$ an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zwei diagonalisierbare Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ heißen *simultan diagonalisierbar*, falls es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass sowohl $S^{-1}AS$ als auch $S^{-1}BS$ Diagonalform haben. Es seien nun $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ zwei diagonalisierbare Matrizen. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$A, B \text{ simultan diagonalisierbar} \Longleftrightarrow A \cdot B = B \cdot A.$$

Hinweis: Zeigen Sie zum Beweis der Rückrichtung zuerst, dass die Eigenräume von B invariant unter der von A induzierten linearen Abbildung sind.