HU Berlin Wintersemester 2009/10

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 09.11.2009 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 4 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte) (Die symmetrische Gruppe)

Sei $[n]$ die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Mit S_n bezeichnen wir die Menge aller bijektiven Abbildungen von $[n]$ auf $[n]$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge S_n (mit der Verknüpfung „$\circ$“ von Abbildungen) eine Gruppe bildet.

(b) Weisen Sie nach, dass die Gruppe S_n für $n \geq 3$ nicht kommutativ ist.

Bemerkung: Ein Element $\sigma \in S_n$ heißt *Permutation*. Wir schreiben $\sigma \in S_n$ in der Form

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines reellen Vektorraumes V.

(a) Beweisen Sie, dass der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ auch ein Unterraum von V ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ kein Vektorraum ist.

(c) Beweisen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ nur dann ein Vektorraum ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten die Menge U aller n-Tupel

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$, welche die m Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{1n}\xi_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 & + & \alpha_{22}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{2n}\xi_n & = & \beta_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ \alpha_{m1}\xi_1 & + & \alpha_{m2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{mn}\xi_n & = & \beta_m \end{array}$$

erfüllen ($\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ mit $j = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$).

(a) Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, falls $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$ gilt.

(b) Bleibt die Aussage aus (a) richtig, wenn für mindestens ein $j \in \{1, \dots, m\}$ ein $\beta_j \neq 0$ ist?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ linear abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5* (10 Punkte)

(a) Es seien v und w linear unabhängige Vektoren aus einem reellen Vektorraum V. Sind die Vektoren $v + w, v - 2w, 2v - w$ linear abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Es seien v und w linear unabhängige Vektoren aus einem reellen Vektorraum V. Geben Sie alle Teilmengen von Vektoren der Menge $\{v + w, v - 2w, 2v - w\}$ an, welche linear unabhängig sind.

(c) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Vektor $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

darstellbar? Ist die Darstellung eindeutig?