HU Berlin Sommersemester 2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 10.05.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 4 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ von A gegeben ist durch

$$p_A(t) = -(t+1)(t-1)(t-\alpha).$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A diagonalisierbar?

(c) Sei $\alpha = 0$. Bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ so, dass die Matrix $S^{-1} \cdot A \cdot S$ diagonal ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Im folgenden seien $A = (\alpha_{k,j})_{k,j=1,\ldots,n}$ und $B = (\beta_{k,j})_{k,j=1,\ldots,n}$ zwei reelle $n \times n$-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\|A\|_\infty := n \cdot \max\{|\alpha_{k,j}|\}_{k,j=1,\ldots,n}$ eine *Norm* (s. Analysis) auf dem reellen Vektorraum $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definiert wird.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung $\|A \cdot B\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$.

(c) Benutzen Sie (b), um zu zeigen, dass die Reihe $\exp(A) := \sum_{\ell=0}^{\infty} A^\ell/\ell!$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ einen Grenzwert besitzt.

(d) Es sei S eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass $\exp(S^{-1} \cdot A \cdot S) = S^{-1} \cdot \exp(A) \cdot S$ gilt.

(e) Es sei A eine diagonalisierbare Matrix. Berechnen Sie $\exp(A)$ mit Hilfe der Eigenwerte und einer Basis aus Eigenvektoren.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und U_1, U_2 zwei lineare Unterräume von V. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $V = U_1 \oplus U_2$.

(ii) Es gilt $V = U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $P : V \longrightarrow V$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$. Sei eine solche Projektion P gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von P entweder 0 oder 1 sind.

(b) Zeigen Sie, dass

$$V = \mathrm{im}(P) \oplus \ker(P)$$

gilt.