Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 22.11.2010 in der Vorlesung

Serie 4 (40 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Seien A eine endliche abelsche Gruppe und $B \leq A$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass eine Untergruppe $C \leq A$ existiert, so dass $C \cong A/B$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei A eine abelsche Gruppe mit $|A/2A| < \infty$. Weiter gebe es eine Funktion $h : A \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*Höhenfunktion*) mit den folgenden Eigenschaften:

(i) für jedes $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist die Menge $\{x \in A \,|\, h(x) \leq c\}$ endlich;

(ii) für jedes $x_0 \in A$ gibt es eine Konstante $c_0 > 0$ mit $h(x + x_0) \leq 2h(x) + c_0$ $(x \in A)$;

(iii) es gibt eine Konstante $c_1 > 0$ mit $h(2x) \geq 4h(x) - c_1$ $(x \in A)$.

Zeigen Sie, dass A endlich erzeugt ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Geben Sie zwei verschiedene, zueinander isomorphe Normalreihen der Diedergruppe D_6 des regelmäßigen Sechsecks an.

(b) Bestimmen Sie alle Kompositionsreihen der Permutationsgruppe S_4 bis auf Isomorphie.
(*Hinweis*: Beachten Sie dabei Aufgabe 5* aus Serie 2.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe G eine Kompositionsreihe besitzt.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Gegeben sei das kommutative Diagramm von Gruppen und Gruppenhomomorphismen

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & D & \xrightarrow{\delta} & E \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle l} \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' & \xrightarrow{\gamma'} & D' & \xrightarrow{\delta'} & E' \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Desweiteren seien g und k Isomorphismen, sowie f als surjektiv und l als injektiv vorausgesetzt. Zeigen Sie, dass h ein Isomorphismus ist.