Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 09.05.2011 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 4 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen M mit der Verknüpfung $\circ$ eine Halbgruppe oder ein Monoid bilden.

(a) $M = \mathbb{N}$, $m \circ n := \max\{m, n\} \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

(b) $M = \mathbb{N}$, $m \circ n := m^n \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

(c) $M = \mathrm{Abb}(X)$, $(f_1 \circ f_2)(x) := f_1(f_2(x))$ für alle $x \in X$ $(f_1, f_2 \in M)$.

(d) $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{N})$, $(f_1 \circ f_2)(n) := f_1(n) + f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(f_1, f_2 \in M)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmenge $\mathcal{R}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ der ersten n natürlichen Zahlen. Auf der Menge $\mathcal{R}_n$ können wir wie folgt zwei Verknüpfungen einführen; dazu bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Rest einer natürlichen Zahl c nach Division durch n mit $R_n(c)$; es gilt $R_n(c) \in \mathcal{R}_n$. Für zwei Zahlen $a, b \in \mathcal{R}_n$ setzen wir jetzt:

$$\oplus : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } a \oplus b := R_n(a+b);$$
$$\odot : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } a \odot b := R_n(a \cdot b).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ assoziativ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{R}_n, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

(c) Es sei $n \in \{1, \ldots, 6\}$. Entscheiden Sie, wann $(\mathcal{R}_n \setminus \{0\}, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge D_{2n} aller Kongruenzabbildungen, die ein regelmäßiges n-Eck auf sich selbst abbilden, eine Gruppe ist (*n-te Diedergruppe*).

(b) Sei $s \in D_{2n}$ eine Spiegelung und $d \in D_{2n}$ eine Drehung um $\frac{2\pi}{n}$. Zeigen Sie:

$$s^2 = e \ , \qquad d^n = e \ , \qquad s \circ d \circ s = d^{-1}.$$

(c) Zeigen Sie: Jedes Element aus D_{2n} ist eindeutig als Produkt $s^l \circ d^m$ mit $l \in \{0, 1\}$, $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ darstellbar.

(d) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von D_{2n}.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Stellen Sie die Gruppentafeln für $(\mathcal{R}_4, \oplus)$, $(\mathcal{R}_5 \setminus \{0\}, \odot)$, $(\mathcal{R}_6, \oplus)$, $(D_4, \circ)$ und $(D_6, \circ)$, sowie für $(S_2, \circ)$ und $(S_3, \circ)$ auf. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede erkennen Sie?