HU Berlin Sommersemester 2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Dr. Anna v. Pippich

Abgabetermin: 06.05.2013 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 4 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen M mit der Verknüpfung $\circ$ eine Halbgruppe oder ein Monoid bilden.

(a) $M = \mathbb{N}$, $m \circ n := \max\{m, n\} \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

(b) $M = \mathbb{N}$, $m \circ n := m^n \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

(c) $M = \mathrm{Abb}(A)$, $(f_1 \circ f_2)(a) := f_1(f_2(a))$ für alle $a \in A$ $(f_1, f_2 \in M)$; hierbei ist A eine beliebige, nicht-leere Menge.

(d) $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{N})$, $(f_1 \circ f_2)(n) := f_1(n) + f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(f_1, f_2 \in M)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und e das neutrale Element von G. Zeigen Sie:

(a) Gilt $g^2 = e$ für alle $g \in G$, dann ist G kommutativ.

(b) Gilt $(g \circ h)^2 = g^2 \circ h^2$ für alle $g, h \in G$, dann ist G kommutativ.

(c) Ist die Anzahl der Elemente von G endlich und gerade, dann existiert ein von e verschiedenes Element $g \in G$ mit $g^2 = e$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Auf der Menge $\mathcal{R}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ definieren wir die Verknüpfungen

$$\oplus : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } a \oplus b := R_n(a+b);$$
$$\odot : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } a \odot b := R_n(a \cdot b).$$

(a) Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für $(\mathcal{R}_2, \oplus)$, $(\mathcal{R}_3, \oplus)$ und $(\mathcal{R}_4, \oplus)$ sowie für $(\mathcal{R}_3 \setminus \{0\}, \odot)$, $(\mathcal{R}_4 \setminus \{0\}, \odot)$ und $(\mathcal{R}_5 \setminus \{0\}, \odot)$ auf.

(b) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ assoziativ sind.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{R}_n, \oplus)$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine abelsche Gruppe ist.

(d) Es sei $n \in \{1, \ldots, 6\}$. Entscheiden Sie, wann $(\mathcal{R}_n \setminus \{0\}, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Es sei $S_n = \{\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \pi \text{ bijektiv}\}$ $(n \in \mathbb{N},\, n \geq 2)$ die symmetrische Gruppe.

(a) Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für $(S_2, \circ)$ und $(S_3, \circ)$ auf.

(b) Zeigen Sie, dass S_n mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen $\circ$ in der Tat eine Gruppe bildet.

(c) Zeigen Sie, dass die Gruppe $(S_n, \circ)$ für $n \geq 3$ nicht kommutativ ist.

Aufgabe 5* (10 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die folgenden Rechenregeln gelten:

(i) $(g^{-1})^{-1} = g$ für alle $g \in G$.

(ii) $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$ für alle $g,\, h \in G$.

(iii) $g^n \circ g^m = g^{n+m}$ für alle $g \in G$ und $n,\, m \in \mathbb{N}$.

(iv) $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$ für alle $g \in G$ und $n,\, m \in \mathbb{N}$.