HU Berlin Wintersemester 2013/14

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 11.11.2013 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 4 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Sind die folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen Gruppen, Halbgruppen oder keines von beiden? Begründen Sie Ihre Aussage.

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$.

(b) $(\mathbb{Z}, -)$.

(c) $(2\mathbb{Z}, +)$, die Menge der geraden Zahlen mit der Addition als Verknüpfung.

(d) $(2\mathbb{Z} + 1, +)$, die Menge der ungeraden Zahlen mit der Addition als Verknüpfung.

(e) $(\{0\}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition ganzer Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 2 (10 Punkte) (Die symmetrische Gruppe)
Wir bezeichnen mit S_n die Menge aller bijektiven Abbildungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf sich selbst.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge S_n (mit der Verknüpfung „$\circ$“ von Abbildungen) eine Gruppe bildet.

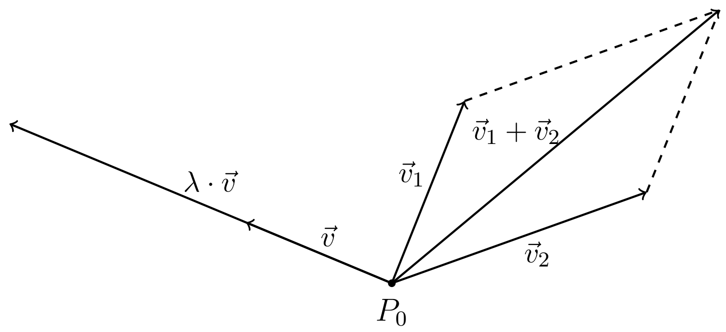
(b) Weisen Sie nach, dass die Gruppe S_n für $n \geq 3$ nicht kommutativ ist.

Bemerkung: Ein Element $\sigma \in S_n$ heißt *Permutation*. Wir schreiben $\sigma \in S_n$ in der Form

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei P_0 ein fixierter Punkt der Ebene $\mathbb{E}$ und $V(\mathbb{E})$ die Menge aller Pfeile (d.h. gerichteter Strecken) in $\mathbb{E}$ mit Anfangspunkt P_0 (dabei kann die Strecke auch die Länge 0 haben).
Die Summe $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ zweier Pfeile $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V(\mathbb{E})$ ist durch den Pfeil mit Anfangspunkt P_0 gegeben, der zu dem P_0 gegenüberliegenden Punkt des von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannten Parallelogramms führt.
Die Multiplikation eines Pfeiles $\vec{v} \in V(\mathbb{E})$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist durch die Streckung von $\vec{v}$ um den Faktor λ gegeben.



Beweisen Sie, dass $V(\mathbb{E})$ zusammen mit der oben genannten Addition und Multiplikation mit Skalaren ein reeller Vektorraum ist. Argumentieren Sie geometrisch.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums $V(\mathbb{E})$ aus Aufgabe 3 sind Unterräume? Begründen Sie Ihre Aussage.

Eine Menge von Pfeilen, deren Endpunkte

(1) einen Kreis mit Zentrum P_0 bilden.

(2) einen Kreis bilden, dessen Zentrum nicht P_0 ist.

(3) eine Gerade durch P_0 bilden.

(4) zwei nichtidentische Geraden durch P_0 bilden.

(b) Seien U_1 und U_2 zwei beliebige Unterräume eines reellen Vektorraumes V. Beweisen Sie, dass der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ebenfalls ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Aktivieren Sie Ihren bettermarks-Account, tragen Sie dort Ihren Namen ein und ändern Sie das voreingestellte Passwort. Lösen Sie Eingangstest Teil 1 und Eingangstest Teil 2 bis zum 18.11.2013.