HU Berlin Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 10.11.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 4 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ zusammen mit der Addition

$$Y + Z := (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z) \quad (Y, Z \subseteq X)$$

und der Skalarmultiplikation $0 \cdot Y := \emptyset$, $1 \cdot Y := Y$ $(Y \subseteq X)$ zu einem Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2 := (\mathcal{R}_2, \oplus, \odot)$ wird. Dabei darf die Assoziativität der Addition durch Mengendiagramme begründet werden.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Wir betrachten im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ die Menge U aller n-Tupel

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

welche die m Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{1,1}\xi_1 & + & \alpha_{1,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{1,n}\xi_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\xi_1 & + & \alpha_{2,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{2,n}\xi_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \alpha_{m,1}\xi_1 & + & \alpha_{m,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{m,n}\xi_n & = & \beta_m \end{array}$$

erfüllen ($\alpha_{j,k} \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ mit $j = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$).
Beweisen Sie, dass U genau dann ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, wenn $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$ gilt.

(b) Bilden die folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie.

(i) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \xi_2 \geq \xi_3 \right\};$

(ii) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \xi_2 = 2\xi_1, \xi_3 = 3\xi_1 \right\};$

(iii) $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \text{ oder } \xi_1 = \xi_2 \right\}.$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Im K-Vektorraum $V = K^3$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\}, \quad U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeigen Sie, dass für $K = \mathbb{R}$

$$U_1 + U_2 = V$$

ist. Gilt dies auch für $K = \mathbb{F}_3 := (\mathcal{R}_3, \oplus, \odot)$?

(b) Es sei $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine endliche Teilmenge eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie: Die Menge $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$ ist der kleinste Unterraum von V, der M enthält.