Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 24.05.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 5 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist das *Matrixexponential* $\exp(A)$ durch die Reihe

$$\exp(A) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\|A\|_\infty := n \cdot \max\{|\alpha_{k,j}|\}_{k,j=1,\ldots,n}$ eine Norm (s. Analysis) auf dem komplexen Vektorraum $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ definiert wird.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung $\|A \cdot B\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$ $(A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$.

(c) Benutzen Sie (b), um zu zeigen, dass die Reihe $\exp(A) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A^\ell/\ell!$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ einen Grenzwert besitzt.

(d) Es sei S eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass $\exp(S^{-1} \cdot A \cdot S) = S^{-1} \cdot \exp(A) \cdot S$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es seien $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ zwei kommutierende Matrizen (d.h. $A \cdot B = B \cdot A$). Zeigen Sie, dass dann $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$ gilt. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass diese Identität nicht für beliebige Matrizen gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\exp(A)$ stets invertierbar ist.

(c) Berechnen Sie $\exp(D)$ für eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(J_n)$ für eine Jordanmatrix $J_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sowie $\exp(\lambda \cdot E_n + J_n)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ mit Hilfe von (a).

(d) Berechnen Sie unter Verwendung der Jordanschen Normalform $\exp(A)$ explizit für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ein Euklidischer Vektorraum ist.

(b) Weisen Sie nach, dass durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := 3 \cdot \xi_1 \cdot \eta_1 + 2 \cdot \xi_1 \cdot \eta_2 + 2 \cdot \xi_2 \cdot \eta_1 + 2 \cdot \xi_2 \cdot \eta_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(c) Zeigen Sie, dass auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ der komplexwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall $I = [0, 1]$ durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

ein unitäres Skalarprodukt definiert wird.