HU Berlin Wintersemester 2009/10

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 16.11.2009 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 5 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachten Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die Unterräume

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\},$$

$$U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$$

gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $v_1, \ldots, v_n$ endlich viele Vektoren eines reellen Vektorraumes V. Beweisen Sie: Die Menge $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$ ist der kleinste Unterraum von V, der die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ enthält.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Betrachten Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie, ob v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

(b) Geben Sie eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ an.

Bitte wenden!

(c) Ergänzen Sie $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Begründen Sie alle Ihre Ergebnisse vollständig!

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachten Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum V der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich drei die Polynome

$$
\begin{aligned}
p_1(t) &= t^3 - t + 1,\\
p_2(t) &= t^3 - 1,\\
p_3(t) &= t^2 - t.
\end{aligned}
$$

(a) Untersuchen Sie, ob die Polynome p_1, p_2, p_3 linear unabhängig sind.

(b) Bilden die Polynome p_1, p_2, p_3 eine Basis von V? Geben Sie eine Basis von V an, welche nur aus Monomen besteht.

(c) Falls die Antwort auf die in (b) gestellte Frage „Nein“ lautet, so ergänzen Sie $\{p_1, p_2, p_3\}$ zu einer Basis von V.

Begründen Sie alle Ihre Ergebnisse vollständig!