HU Berlin Sommersemester 2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 19.05.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 5 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -1+i \\ 0 & -1-i & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$$

eine Matrix mit komplexen(!) Einträgen. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A sowie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ derart, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien eine Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ und ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Die Gleichung

$$A \cdot \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f_j : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (j = 1, 2, 3)$ bildet zusammen mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \end{pmatrix} = v$$

ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen.

(a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\exp(t \cdot A) \cdot v$ eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist.

(b) Geben Sie explizit eine Lösung des Differentialgleichungssystem für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$
eine Matrix mit $\det(A) = 1$. Zeigen Sie:

(a) Ist $|\mathrm{tr}(A)| > 2$, so gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, mit
$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}.$$

(b) Ist $|\mathrm{tr}(A)| < 2$, so gibt es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit
$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \cos(\mu) & -\sin(\mu) \\ \sin(\mu) & \cos(\mu) \end{pmatrix}.$$

(c) Ist $|\mathrm{tr}(A)| = 2$ und $A \neq \pm E$, so gibt es eine Matrix $R \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit
$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } R^{-1}AR = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ der reellen quadratischen Matrizen. Für $A = (\alpha_{k,j})_{1\leq k,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bezeichne $A^t := (\alpha_{j,k})_{1\leq k,j\leq n}$ die transponierte Matrix von A.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V \longrightarrow V$, gegeben durch $f(A) = A + A^t$, eine lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ sowie die Dimensionen beider Räume.

(c) Zeigen Sie, dass $V = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$ gilt.

Aufgabe 5* (10 Punkte)
Seien
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}), \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$
Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ derart, dass $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ zugleich Diagonalmatrizen sind.