Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 29.11.2010 in der Vorlesung

Serie 5 (40 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Seien G eine Gruppe und $[G, G]$ der *Kommutator von* G, d.h. diejenige Untergruppe von G, welche von allen Elementen der Form $aba^{-1}b^{-1}$ $(a, b \in G)$ erzeugt wird. Weiter seien $D^i(G)$ $(i \in \mathbb{N})$ die *i-ten iterierten Kommutatoren von* G, welche induktiv definiert sind durch $D^{i+1}(G) := [D^iG, D^iG]$ und $D^0(G) := G$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $[G, G]$ ist ein Normalteiler von G und die Faktorgruppe $G/[G, G]$ ist abelsch ist.

(b) G ist genau dann auflösbar, wenn $D^n(G) = \{e\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1. Zeigen Sie:

(a) Das Ideal $\mathfrak{p}$ ist genau dann ein Primideal, wenn $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

(b) Das Ideal $\mathfrak{m}$ ist genau dann ein maximales Ideal, wenn $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\big(f(X), g(X)\big)$ für die Polynome $f(X) = X^5 + 2X^3 + X^2 + X + 1$ und $g(X) = X^5 + X^3 + 2X^2 + 2$ aus $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Seien R ein Euklidischer Ring, $a, b \in R$ und $\mathfrak{a} = (a)$ sowie $\mathfrak{b} = (b)$ die zugehörigen Hauptideale. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \big((a, b)\big)$ gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Unterring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \left\{ \alpha = \frac{a + b\sqrt{-3}}{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}\,,\ a \equiv b \bmod 2 \right\} \subseteq \mathbb{C}$$

ein Euklidischer Ring ist. Bestimmen Sie alle Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
(*Hinweis:* Definieren Sie die *Norm von* α durch $N(\alpha) := (a^2 + 3b^2)/4$ und verwenden Sie die Eigenschaft $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.)

(b) Zeigen Sie, dass der Unterring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{\alpha = a + b\sqrt{-5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

kein faktorieller Ring ist.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Permutationsgruppen S_n für $n \geq 5$ nicht auflösbar sind.
(*Hinweis:* Beweisen Sie dazu zuerst, dass ein Normalteiler N mit abelscher Faktorgruppe S_n/N alle 3-Zykeln von S_n enthalten muss.)