HU Berlin Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 16.05.2011 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 5 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es seien $(G, \circ)$ eine Gruppe, $g \in G$, g'_ℓ ein linksinverses bzw. g'_r ein rechtsinverses Element zu g. Zeigen Sie, dass dann $g'_\ell = g'_r$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass das Inverse g^{-1} eines Elements g einer Gruppe $(G, \circ)$ eindeutig bestimmt ist.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $g, h \in G$

$$(g^{-1})^{-1} = g \quad \text{und} \quad (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$$

gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Für eine Gruppe $(G, \circ)$ mit neutralem Element e und $n \in \mathbb{N}$ besteht für die n-malige Verknüpfung eines Elementes $g \in G$ mit sich selbst die Potenzschreibweise:

$$g^n := \underbrace{g \circ \ldots \circ g}_{n\text{-mal}} \text{ und } g^0 = e.$$

Zeigen Sie, dass dazu die folgenden Rechenregeln gelten:

(a) $g^n \circ g^m = g^{n+m}$ für alle $g \in G$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

(b) $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$ für alle $g \in G$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Geben Sie alle strukturell verschiedenen Gruppentafeln zu Gruppen der Ordnungen 1, 2, 3 und 4 an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Finden Sie alle Untergruppen der Gruppe S_3. Welche davon sind zyklische Gruppen?

Aufgabe 5* (10 Punkte)

(a) Die *Riemannsche Zetafunktion* ist gegeben durch die Reihe

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Beweisen Sie, dass diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$ konvergiert. Berechnen Sie

$$\lim_{x \downarrow 1} \zeta(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Riemannsche Zetafunktion für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$ die sogenannte Eulersche Produktentwicklung besitzt, d.h. dass die Formel

$$\zeta(x) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-x}}$$

besteht.

(c) Geben Sie mit Hilfe von (a) und (b) einen alternativen Beweis zur Unendlichkeit der Primzahlmenge $\mathbb{P}$.