# Übungsaufgaben zur Vorlesung

# **Algebra / Zahlentheorie**

Dr. Anna v. Pippich

Abgabetermin: 13.05.2013 vor der Vorlesung

**Bitte beachten:**
**JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.**
**JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.**

## Serie 5 (40 Punkte)

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $f : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $f(e_G) = e_H$ und $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ für jedes $g \in G$.

(b) Für ein Element $g \in G$ gilt stets

$$\mathrm{ord}_G(g) \geq \mathrm{ord}_H(f(g)).$$

Ist $f$ ein Gruppenisomorphismus, dann gilt sogar $\mathrm{ord}_G(g) = \mathrm{ord}_H(f(g))$.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: $S_4 \cong D_{24}$.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Finden Sie alle Gruppenhomomorphismen $f : (\mathcal{R}_4, \oplus) \longrightarrow (\mathcal{R}_4, \oplus)$.

(b) Es seien $p \in \mathbb{P}$ und $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $n$ nicht durch $p$ teilbar ist. Finden Sie alle Gruppenhomomorphismen $g : (\mathcal{R}_p, \oplus) \longrightarrow (\mathcal{R}_n, \oplus)$.

Bestimmen Sie jeweils Kern und Bild dieser Gruppenhomomorphismen.

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $f : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $U \leq G$, so folgt $f(U) \leq H$. Insbesondere gilt $\mathrm{im}(f) \leq H$.

(b) Ist $V \leq H$, so folgt $f^{-1}(V) \leq G$. Insbesondere gilt $\ker(f) \leq G$.

(c) Es gelten die beiden Kriterien:

$f$ ist injektiv $\Longleftrightarrow \ker(f) = \{e_G\}$; $f$ ist surjektiv $\Longleftrightarrow \mathrm{im}(f) = H$.

### Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Geben Sie die Ordnung aller Elemente der Gruppen $S_3$ und $D_6$ an.

(b) Geben Sie alle Untergruppen von $S_3$ und $D_6$ an. Welche davon sind zyklisch?

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: $S_3 \cong D_6$.