HU Berlin Wintersemester 2013/14

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 18.11.2013 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 5 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei

$$V_d := \left\{ p(X) = \alpha_d X^d + \alpha_{d-1} X^{d-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0 \,\middle|\, \alpha_0, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich d mit reellen Koeffizienten. Auf V_d wird durch

$$\begin{aligned}&(\alpha_d X^d + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0) + (\beta_d X^d + \ldots + \beta_1 X + \beta_0) := \\ &(\alpha_d + \beta_d) X^d + \ldots + (\alpha_1 + \beta_1) X + (\alpha_0 + \beta_0)\end{aligned}$$

eine Addition und durch

$$\lambda \cdot (\alpha_d X^d + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0) := (\lambda \alpha_d) X^d + \ldots + (\lambda \alpha_1) X + (\lambda \alpha_0)$$

eine Multiplikation mit Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass V_d zusammen mit dieser Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum ist.

(b) Es sei $W_d := \left\{ p(X) \in V_d \,\middle|\, \mathrm{Grad}\ p(X) = d \right\} \subseteq V_d$ die Menge aller Polynome vom Grad d. Ist W_d ein Unterraum von V_d? Begründen Sie Ihre Antwort.

Erinnerung: Es sei $p(X) = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$ ein Polynom mit $\alpha_n \neq 0$. Dann ist der Grad von $p(X)$ durch die natürliche Zahl n gegeben.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $v_1, \ldots, v_n$ endlich viele Vektoren eines reellen Vektorraumes V.
Beweisen Sie, dass die Menge $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$ der kleinste Unterraum von V ist, der die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ enthält.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Wir betrachten im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ die Menge U aller n-Tupel

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

welche die m Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{1,1}\xi_1 & + & \alpha_{1,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{1,n}\xi_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\xi_1 & + & \alpha_{2,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{2,n}\xi_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \alpha_{m,1}\xi_1 & + & \alpha_{m,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{m,n}\xi_n & = & \beta_m \end{array}$$

erfüllen ($\alpha_{j,k} \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ mit $j = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$).
Beweisen Sie, dass U genau dann ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, wenn $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$ gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Es seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines reellen Vektorraumes V. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ kein Vektorraum ist.

(b) Es sei nun $V = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die von den Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterräume $U_1 = \langle u_1 \rangle$, $U_2 = \langle u_2 \rangle$ und $U_3 = \langle u_3 \rangle$. Zeigen Sie, dass die Gleichheit

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$$

nicht erfüllt ist, d.h. es besteht im Allgemeinen kein Distributivgesetz für die Operationen „Summe“ und „Durchschnitt“ von Unterräumen.