

## Übungsaufgaben zur Vorlesung

**Algebra / Zahlentheorie**

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 18.05.2015 in der Vorlesung

**Bitte beachten:****JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.****JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.****Serie 5 (40 Punkte)****Aufgabe 1 (10 Punkte)**

- (a) Bestimmen Sie für jedes Element  $g \in D_6$  seine Ordnung  $\text{ord}_{D_6}(g)$ .
- (b) Finden Sie alle Untergruppen der Gruppe  $D_6$ . Welche davon sind kommutative Gruppen? Welche sind zyklisch?

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Geben Sie alle strukturell verschiedenen Gruppentafeln zu Gruppen der Ordnungen 1, 2, 3 und 4 an. Begründen Sie.

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Es sei  $f : (G, \circ_G) \longrightarrow (H, \circ_H)$  ein Gruppenhomomorphismus.

- (a) Zeigen Sie, dass für die neutralen Elemente  $e_G \in G$  und  $e_H \in H$  die Gleichheit  $f(e_G) = e_H$  besteht.
- (b) Zeigen Sie, dass für ein Element  $g \in G$  und sein Inverses  $g^{-1} \in G$  die Gleichheit  $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$  in  $H$  gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass für ein Element  $g \in G$  stets  $\text{ord}_G(g) \geq \text{ord}_H(f(g))$  gilt.
- (d) Zeigen Sie: Ist  $f$  ein Gruppenisomorphismus, so ist die mengentheoretische Umkehrabbildung  $f^{-1} : H \longrightarrow G$  ebenfalls ein Gruppenisomorphismus.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**

Gibt es einen Gruppenisomorphismus zwischen

- (a) der Untergruppe  $U = \{d^0, d^1, d^2, d^3\} \leq D_8$  der Drehungen in  $D_8$  und  $\mathcal{R}_4$ ?
- (b)  $\mathcal{R}_6$  und  $D_6$ ?
- (c)  $D_{24}$  und  $S_4$ ?

Begründen Sie.