HU Berlin Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 17.11.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 5 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir betrachten die Vektoren

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$;

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^3$;

c) $\begin{pmatrix} -(i+1) \\ i-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(i-1) \\ 2 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$;

d) $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\cos(x)$, $\cos(2x)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$.

Stellen Sie in jedem Fall fest, ob diese Vektoren linear unabhängig sind und ob sie ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums bilden.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Im Vektorraum $\mathbb{Q}[X]_{\leq 3}$ der Polynome mit rationalen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich 3 betrachten wir die Teilmenge $M_1 = \{X^3 - X + 1, X^3 - 1, X^2 - X, X^3\}$.

  (i) Untersuchen Sie, ob M_1 linear unabhängig ist.

  (ii) Nutzen Sie den Austauschsatz von Steinitz, um die Menge $M_2 = \{X - 2, X^2 - 2\}$ durch Elemente aus M_1 zu einer Basis von $\mathbb{Q}[X]_{\leq 3}$ zu ergänzen.

(b) Im Vektorraum $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, \ldots) \mid a_j \in \mathbb{R}\ (j \in \mathbb{N})\}$ der reellen Folgen betrachten wir die Teilmenge U aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die die Gleichheit

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

gilt. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von V ist und bestimmen Sie die Dimension von U, indem Sie eine Basis von U finden.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei V ein K-Vektorraum und $\mathfrak{B} \subseteq V$. Beweisen Sie, dass die vier folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathfrak{B}$ ist eine Basis von V.
(ii) $\mathfrak{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
(iii) $\mathfrak{B}$ ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V.
(iv) Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von Elementen aus $\mathfrak{B}$ darstellen.