HU Berlin Wintersemester 2013/14

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 25.11.2013 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 6 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachten Sie im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die Unterräume

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\},$$

$$U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind und stellen Sie die Vektoren v_j $(j = 1, \ldots, 4)$ jeweils als Linearkombination der drei anderen Vektoren dar, falls dies möglich ist.

(b) Geben Sie eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Betrachten Sie im reellen Vektorraum V_3 der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich drei (siehe Serie 5, Aufgabe 1) die Polynome

$$
\begin{aligned}
p_1(X) &= X^3 - X + 1, \\
p_2(X) &= X^3 - 1, \\
p_3(X) &= X^2 - X.
\end{aligned}
$$

(a) Geben Sie eine Basis von V_3 an, welche nur aus Monomen besteht.

(b) Untersuchen Sie, ob die Polynome p_1, p_2, p_3 linear unabhängig sind. Bildet die Menge $\{p_1, p_2, p_3\}$ eine Basis von V_3?

Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Es seien v und w linear unabhängige Vektoren aus einem reellen Vektorraum V. Geben Sie alle Teilmengen von Vektoren der Menge $\{v + w, v - 2w, 2v - w\}$ an, welche linear unabhängig sind.

(b) Es sei $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis eines reellen Vektorraumes V. Zeigen Sie, dass dann auch die Menge $\{w_1, w_2, w_3\}$ mit

$$
\begin{aligned}
w_1 &:= 3v_1 + v_2 + 2v_3 \\
w_2 &:= v_1 + v_2 + v_3 \\
w_3 &:= v_1 + v_2 + 2v_3
\end{aligned}
$$

eine Basis von V ist.

Erinnerung: Bis zum Montag, den 18.11.2013, ist es nach Aufgabe 5 von Serie 3 noch möglich, für das Absolvieren des bettermarks-Eingangstests Zusatzpunkte zu erhalten. Studierende, die ihr bettermarks-Passwort vergessen haben und keine eigene E-Mail-Adresse dort hinterlegt haben, werden gebeten, die „Passwort-vergessen"-Funktion von bettermarks zu nutzen. Dann kontaktieren Sie bitte Luise Fehlinger, um das neue Passwort zu erfahren.