HU Berlin Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 31.05.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 6 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Auf dem Raum $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 mit reellen Koeffizienten betrachten wir das Skalarprodukt

$$\langle p(X), q(X) \rangle := \int_{-1}^{1} p(X)q(X)\, dX \quad (p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3}) .$$

(a) Stellen Sie die Gram'sche Matrix zu diesem Skalarprodukt bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ auf.

(b) Berechnen Sie bezüglich dieses Skalarprodukts die Winkel zwischen den Polynomen 1 und $1 + X$, X und X^2 sowie X^2 und X^3.

(c) Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis $\mathfrak{B}$ an, um eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ bezüglich dieses Skalarprodukts zu konstruieren.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum mit der durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ $(x \in V)$ gegebenen Norm. Zeigen Sie:

(a) Besitzt ein Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{L}(V)$ die Eigenschaft $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$ (*Längentreue*), dann gilt auch $\langle x, y\rangle = \langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$ (*Winkeltreue*).

(b) Ist $\mathfrak{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthogonalbasis von V und $x \in V \setminus \{0\}$ beliebig, dann gilt $\cos^2(\alpha_1) + \cdots + \cos^2(\alpha_n) = 1$ (hierbei bezeichnet α_j den Winkel zwischen x und b_j).

(c) Wie in der Vorlesung gezeigt, erfüllt die Norm $\|\cdot\|$ die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in V).$$

Wann gilt in dieser Ungleichung die Gleichheit? Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an und beweisen Sie diese.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $v \in V \setminus \{0\}$. Die lineare Abbildung $P_v : V \longrightarrow V$ sei gegeben durch

$$P_v(x) = x - \frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v \quad (x \in V).$$

(a) Bestimmen Sie $\ker(P_v)$ und $\operatorname{im}(P_v)$.

(b) Berechnen Sie für alle $w \in \operatorname{im}(P_v)$ die Werte $P_v(w)$ und $\langle w, v\rangle$.

(c) Es seien nun $V = \mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $v = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$.

Bestimmen Sie Orthogonalbasen von $\ker(P_v)$ bzw. $\operatorname{im}(P_v)$ und berechnen Sie das Minimalpolynom von P_v.