HU Berlin Wintersemester 2009/10

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 23.11.2009 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 6 (40+15 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

(b) Die Innenwinkelsumme eines konvexen n-Ecks ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) beträgt $180° \cdot (n-2)$.

(c) Die Gleichung

$$3x + 5y = n$$

besitzt für $n \in \mathbb{N}$ jeweils Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei V ein endlich erzeuger $\mathbb{R}$-Vektorraum. Beweisen Sie die Äquivalenz der drei folgenden Aussagen:

(i) $\mathfrak{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ist eine Basis von V.

(ii) $\mathfrak{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.

(iii) $\mathfrak{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V.

Hinweis: Diejenigen Implikationen, welche bereits in der Vorlesung bewiesen wurden, sollen angegeben werden, müssen aber nicht erneut nachgewiesen werden.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ seien die Unterräume

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\} \text{ und } U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

gegeben. Bestimmen Sie jeweils Basen für die Unterräume $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$. Begründen Sie alle Ihre Ergebnisse vollständig!

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Betrachten Sie den linearen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$ aller Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

welche die drei Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \xi_1 & + & 2\xi_2 & - & \xi_3 & + & 2\xi_4 & = & 0 \\ 3\xi_1 & + & 8\xi_2 & + & \xi_3 & + & 6\xi_4 & = & 0 \\ \xi_1 & + & 3\xi_2 & + & \xi_3 & + & 2\xi_4 & = & 0 \end{array}$$

erfüllen.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von U und geben Sie die Dimension von U an.

(b) Ergänzen Sie die Basis von U aus (a) zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 5* (15 Punkte)
Betrachten Sie die Menge

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \right\}$$

zusammen mit einer Verknüpfung $\Box : M \times M \to M$, welche gemäß

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Box \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix}$$

definiert ist, und einer Skalarmultiplikation $\triangledown : \mathbb{R} \times M \to M$, welche gemäß

$$\lambda \triangledown \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \lambda\alpha_3 \end{pmatrix}$$

definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\Box$ und $\triangledown$ wohldefiniert sind.

(b) Zeigen Sie, dass $(M, \Box)$ eine abelsche Gruppe ist.

(c) Prüfen Sie, ob $(M, \Box, \triangledown)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(d) Zeichnen Sie die Menge M und veranschaulichen Sie $\Box$ und $\triangledown$.