Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 26.05.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 6 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der folgenden Abbildungen $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ definieren ein Skalarprodukt? Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) Für $V = \mathbb{R}^3$ und $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \in V$ sei

$$\langle x, y \rangle := \eta_1(3\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3) + \eta_2(-2\xi_1 + 2\xi_2) + \eta_3(\xi_1 + 5\xi_3)\,.$$

(b) Für $V = \mathbb{R}^2$ und $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in V$ sei

$$\langle x, y \rangle := (\xi_1 + \eta_1)^2 + (\xi_2 + \eta_2)^2\,.$$

(c) Für $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $A, B \in V$ sei

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(A^t \cdot B)\,.$$

(d) Für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ und $f, g \in V$ sei

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt\,.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Für $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei durch

$$\langle x, y \rangle := \xi_1\eta_1 + 2\xi_1\eta_2 + 2\xi_2\eta_1 + 5\xi_2\eta_2$$

ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ definiert. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ zu der Geraden $\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden folgenden windschiefen Geraden im $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarproduktes:

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad G_2 = \left\{ \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum mit der durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ gegebenen Norm. Zeigen Sie:

(a) $\|x\| = \|y\|$ gilt genau dann, wenn $(x-y) \perp (x+y)$ ist. Wie lässt sich diese Tatsache geometrisch interpretieren?

(b) Wenn ein Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{L}(V)$ längentreu ist, d.h. $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$ gilt, so ist er auch winkeltreu.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) A ist invertierbar genau dann, wenn $p_A(0) \neq 0$ gilt.

(b) A ist invertierbar genau dann, wenn $m_A(0) \neq 0$ gilt.

(c) Berechnen Sie die Inverse von A als Polynom in A.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Cayley-Hamilton.

(d) Berechnen Sie die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

mit der in (c) entwickelten Methode.