Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 06.12.2010 in der Vorlesung

Serie 6 (40 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Seien E/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in E$ algebraisch über K.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p} := \{f \in K[X] \mid f(\alpha) = 0\}$ ein Ideal ist und das Ideal $\mathfrak{p}$ durch das Minimalpolynom $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ erzeugt wird.

(ii) Berechnen Sie α^{-1} in $K(\alpha)$ mit Hilfe von $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$.

(iii) Seien $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{7}$ und $g(X) = X^5 + 2X^3 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Berechnen Sie $g(\alpha)^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ als rationale Linearkombination von $1, \alpha, \alpha^2$ und α^3.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(i) Seien p eine Primzahl und $f(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad n, dessen ganzzahlige Koeffizienten folgende Bedingungen erfüllen:

(a) $p \nmid a_n$,

(b) $a_j \equiv 0 \mod p$ $(j = 0, \ldots, n-1)$,

(c) $p^2 \nmid a_0$.

Zeigen Sie, dass f in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

(ii) Zeigen Sie, dass folgende Polynome in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel sind:

(a) $f(X) = X^4 + aX - 1$ $(a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

(b) $h(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$ (p Primzahl).

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben seien die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\zeta_3)/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$ von $\mathbb{Q}$, wobei $\zeta_n := \exp(2\pi i/n) \in \mathbb{C}$ eine sogenannte n-te *Einheitswurzel* bezeichnet ($n \in \mathbb{N}$). Bestimmen Sie jeweils das zugehörige Minimalpolynom sowie den entsprechenden Grad der Körpererweiterung.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ein Polynom $f(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad n heißt *primitiv*, falls der größte gemeinsame Teiler $(a_0, \dots, a_n)$ der Koeffizienten von $f(X)$ gleich 1 ist. Zeigen Sie, dass das Produkt $f(X)g(X)$ zweier primitiver Polynome $f(X), g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ebenfalls primitiv ist.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Seien p eine Primzahl und $f(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$ ein primitives Polynom mit $p \nmid a_n$. Weiter sei $\overline{f}(X)$ das Polynom in $\mathbb{F}_p[X]$, welches man durch Reduktion modulo p der Koeffizienten a_j erhält. Zeigen Sie:

(i) Falls $f(X)$ reduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist, dann ist auch $\overline{f}(X)$ reduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$.

(ii) Zeigen Sie, dass folgende Polynome in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel sind:

   (a) $f(X) = 7X^3 + 6X^2 + 4X + 6$.

   (b) $g(X) = 9X^4 + 4X^3 - 3X + 7$.