HU Berlin Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 23.05.2011 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 6 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $f : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass für die neutralen Elemente $e_G \in G$ und $e_H \in H$ die Gleichheit $f(e_G) = e_H$ besteht.

(b) Zeigen Sie, dass für ein Element $g \in G$ und sein Inverses $g^{-1} \in G$ die Gleichheit $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ in H gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für ein Element $g \in G$ stets $\mathrm{ord}_G(g) \geq \mathrm{ord}_H(f(g))$ gilt.

(d) Gibt es einen Gruppenisomorphismus zwischen D_{24} und S_4?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $f : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie mit Hilfe des Untergruppenkriteriums, dass $\ker(f)$ eine Untergruppe von G und dass $\mathrm{im}(f)$ eine Untergruppe von H ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Finden Sie alle Gruppenhomomorphismen

$$f : (\mathcal{R}_4, \oplus) \longrightarrow (\mathcal{R}_4, \oplus).$$

Bestimmen Sie jeweils Kern und Bild dieser Gruppenhomomorphismen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{R}_7 \backslash \{0\}, \odot)$ eine Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie alle zyklischen Untergruppen von $(\mathcal{R}_7 \backslash \{0\}, \odot)$.

(c) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{R}_7 \backslash \{0\}, \odot)$ zu $(\mathcal{R}_6, \oplus)$ isomorph ist.