HU Berlin Sommersemester 2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Dr. Anna v. Pippich

Abgabetermin: 22.05.2013 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 6 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Folgern Sie aus dem Satz von Lagrange, dass in einer endlichen Gruppe die Ordnung eines Elements stets ein Teiler der Gruppenordnung ist.

(b) Schließen Sie daraus, dass eine Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist.

(c) Bestimmen Sie alle möglichen Gruppen der Ordnungen 4, 5, 6 und 7 bis auf Gruppenisomorphie.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Geben Sie alle möglichen Äquivalenzrelationen auf der Menge $M = \{0, 1, 2\}$ an.

(b) Wir betrachten die folgende binäre Relation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(a, b) \sim (c, d) :\iff a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Überprüfen Sie, ob es sich hierbei um eine Äquivalenzrelation handelt. Geben Sie ggf. alle Äquivalenzklassen an.

(c) Es sei M eine endliche Menge mit einer Äquivalenzrelation $\sim$. Zeigen Sie, dass zwei Äquivalenzklassen von M bzgl. $\sim$ entweder gleich oder disjunkt sind. Zeigen Sie weiter, dass M die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $N \leq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $N \trianglelefteq G$.

(ii) Für alle $g \in G$ gilt $g^{-1} \circ N \circ g \subseteq N$.

(iii) Für alle $g \in G$ gilt $g \circ N \circ g^{-1} \subseteq N$.

Bitte wenden!

(iv) Für alle $g \in G$ gilt $g \circ N \circ g^{-1} = N$.

(v) Für alle $g \in G$ gilt $N \circ g = g \circ N$.

(vi) Für alle $g \in G$ gibt es ein $g' \in G$, so dass $g \circ N = N \circ g'$ gilt, d.h. die Menge der Linksnebenklassen bzgl. N ist gleich der Menge der Rechtsnebenklassen bzgl. N.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei $S_3 = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}$ die symmetrische Gruppe, wobei

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Untergruppen $A_3 := \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\} \leq S_3$ und $U := \langle \pi_5 \rangle \leq S_3$. Berechnen Sie alle Links- und Rechtsnebenklassen von S_3 nach A_3 bzw. von S_3 nach U. Geben Sie

$$S_3/A_3,\ A_3\backslash S_3,\ [S_3 : A_3] \quad \text{bzw.} \quad S_3/U,\ U\backslash S_3,\ [S_3 : U]$$

an. Entscheiden Sie, ob $A_3 \trianglelefteq S_3$ und $U \trianglelefteq S_3$ gilt.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_3.

(b) Es sei $f : (S_3, \circ) \longrightarrow (\mathcal{R}_3, \oplus)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass f dann der Nullhomomorphismus sein muss, d.h. dass $f(\pi) = 0$ für alle $\pi \in S_3$ gilt.