HU Berlin Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 01.12.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 7 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien V und W K-Vektorräume. Welche der folgenden Abbildungen $f : V \longrightarrow W$ sind linear? Begründen Sie. Bestimmen Sie für die linearen Abbildungen jeweils Kern und Bild.

(a) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 + 2\xi_4 \\ \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{R}$.

(b) $f : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$, $f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_4 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{C}$.

(c) $f : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \xi_1 \cdot \xi_2$, $K = \mathbb{Q}$.

(d) $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$, $f(p(X)) = p'(X) - p(0)$, $K = \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{Q}^4$. Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$, die durch die Werte

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

festgelegt ist.

(a) Geben Sie die Abbildungsvorschrift von f an.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(f)$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathbb{Q}^4$.

(c) Zeigen Sie, dass die Bilder der hinzugenommenen Vektoren eine Basis von $\mathrm{im}(f)$ bilden.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien V und W K-Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Das Bild $f(V') \subseteq W$ eines Unterraums $V' \subseteq V$ ist ein Unterraum von W.

(b) Das Urbild $f^{-1}(W') \subseteq V$ eines Unterraums $W' \subseteq W$ ist ein Unterraum von V.

(c) Ist f injektiv und ist die Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ $(n \geq 1)$ linear unabhängig, dann ist auch $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\} \subseteq W$ linear unabhängig.

(d) Ist V endlich-dimensional und ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V, dann gilt: Falls $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ ein Erzeugendensystem von W bildet, so wird *jede* Basis $\mathfrak{B}'$ von V durch f auf ein Erzeugendensystem von W abgebildet.