HU Berlin Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 07.06.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 7 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die orthogonalen Matrizen $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bilden.

(b) Es sei $t \in [0, 2\pi)$. Weisen Sie nach, dass die Matrix

$$D_t := \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ liegt und dass umgekehrt jede Matrix $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\det(A) = 1$ diese Form hat. Interpretieren Sie die zugehörigen Abbildungen geometrisch.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ liegt. Beschreiben Sie die geometrische Wirkung der zugehörigen Abbildung. Beweisen Sie, dass alle Matrizen in $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ von der Form D_t oder $S \cdot D_t$ sind.

Aufgabe 2 (10+5 Punkte)

Es seien $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Eine orthogonale Abbildung $f \in \mathrm{O}(V)$ heißt *Drehung*, wenn für die Matrix S von f bzgl. $\mathcal{B}$ die Gleichheit $\det(S) = 1$ gilt.

(a) Es sei $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Zeigen Sie, dass jede Drehung $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$ eine *Drehachse* besitzt, es also einen 1-dimensionalen linearen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $f(u) = u$ für alle $u \in U$ gilt.

(b) Es seien $f_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(j = 1, 2)$ Drehungen um die ξ_1-Achse bzw. die ξ_3-Achse des $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad f_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrizen von f_1 und f_2 bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Drehachse sowie den Drehwinkel (im Bogenmaß) der Drehung $f_1 \circ f_2$.

(c)* „Der Ball ist rund, und das Spiel dauert 90 Minuten". Beweisen Sie unter diesen Annahmen: Auf der Oberfläche eines Fußballs, der zu Beginn der ersten Halbzeit und zu Beginn der zweiten Halbzeit am selben Anstoßpunkt im Stadion liegt, gibt es mindestens zwei Punkte, die zu diesen zwei Zeitpunkten jeweils unverändert am selben Ort im umgebenden Raum liegen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ eine unitäre Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von U den Betrag 1 haben.

(b) Für einen Unterraum $W \subseteq \mathbb{C}^n$ definieren wir $W^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, w \rangle = 0, \ \forall w \in W\}$. Zeigen Sie: Ist W ein U-invarianter Unterraum, so ist $W^\perp$ ebenfalls U-invariant.

(c) Beweisen Sie, dass U diagonalisierbar ist.