Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 30.11.2009 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 7 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Sei $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine geordnete Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V. Beweisen Sie, dass die Koordinatenabbildung $f_{\mathfrak{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ eine Bijektion ist.

(b) Geben Sie die Koordinaten der Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi + 1 \\ \pi^2 + 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

bzgl. der geordneten Basis

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi^2 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Betrachten Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum V der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich drei die Polynome

$$\begin{aligned} p_j(t) &= (1-t)^j \qquad (j = 0, 1, 2, 3), \\ q_1(t) &= t^2 - t, \\ q_2(t) &= t^3 - 1. \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie, dass $\mathfrak{B} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ eine Basis von V ist.

(b) Beweisen Sie, dass q_1, q_2 linear unabhängig sind.

Bitte wenden!

(c) Tauschen Sie, entsprechend dem Beweis des Austauschsatzes von Steinitz, die Vektoren q_1 und q_2 sukzessive in die Basis $\mathfrak{B}$ ein, um eine Basis von V der Gestalt

$$\mathfrak{B}' = \{q_1, q_2, p_j, p_k\}$$

mit $j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$ zu erhalten.

(d) Geben Sie die Koordinaten von q_1, q_2 bzgl. der geordneten Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ an.

Begründen Sie alle Ihre Ergebnisse vollständig!

Aufgabe 3 (10 Punkte)
In einem n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V seien $U_1, \ldots, U_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ lineare Unterräume der Dimension $n - 1$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap \cdots \cap U_k) \geq n - k.$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion!

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Betrachten Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die linearen Unterräume

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

welche die folgenden affinen Unterräume

$$\mathbb{A}(U_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U_1, \qquad \mathbb{A}(U_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + U_2, \qquad \mathbb{A}(U_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + U_3$$

von $\mathbb{R}^3$ definieren.

(a) Bestimmen Sie die affinen Räume $\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2)$ und $\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2) \cap \mathbb{A}(U_3)$, d.h. finden Sie Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ und lineare Unterräume $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2) = v_1 + W_1,$$
$$\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2) \cap \mathbb{A}(U_3) = v_2 + W_2.$$

(b) Geben Sie jeweils die Dimension der affinen Räume $\mathbb{A}(U_1)$, $\mathbb{A}(U_2)$, $\mathbb{A}(U_3)$, $\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2)$ und $\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2) \cap \mathbb{A}(U_3)$ an.

(c) Geben Sie jeweils ein lineares Gleichungssystem an, welches die Lösungsmenge $\mathbb{A}(U_1)$, bzw. $\mathbb{A}(U_2)$, bzw. $\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2)$ besitzt.