HU Berlin Sommersemester 2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 31.05.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 7 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Für $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei $\langle x, y \rangle := (\xi_1, \xi_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert, wenn $\alpha > 0$ und $\det(A) > 0$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Für $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sei gemäß $\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(A^t \cdot B)$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ definiert (siehe Serie 6, Aufgabe 1(c)). Zeigen Sie, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ist. Bestimmen Sie weiter das orthogonale Komplement der Unterräume der Diagonalmatrizen sowie der symmetrischen Matrizen.

(b) Für $f, g \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$ sei gemäß $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ definiert (siehe Serie 6, Aufgabe 1(d)). Berechnen Sie den Winkel zwischen $f(t) = \exp(t/2\pi)$ und $g(t) = 4t$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Für $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sei eine bilineare und symmetrische Abbildung $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\langle x, y \rangle := 2\xi_1\eta_1 + 3\xi_2\eta_2 + 4\xi_3\eta_3 + \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 + \xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1 + \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Euklidischer Vektorraum ist. Bestimmen Sie die Gramsche Matrix bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ sowie bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$.

(b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^3$, indem Sie das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis $\mathcal{B}$ aus (a) anwenden. Bestimmen Sie die Gramsche Matrix bezüglich $\mathcal{B}'$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachten Sie den Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und die Ebenen

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie einen Normalenvektor $n_j \in \mathbb{R}^3$ zu E_j (d.h. $n_j \perp E_j$) mit $||n_j|| = 1$ für $j = 1, 2$.

(b) Berechnen Sie den Winkel zwischen E_1 und E_2.

(c) Ergänzen Sie n_1 zu einer Orthonormalbasis $\{n_1, b_2, b_3\}$ des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin(t)\cos(t)}\,dt \leq 1.$$

Hinweis: Definieren Sie einen geeigneten Euklidischen Vektorraum und verwenden Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

(b) Es sei $\mathcal{P}_4$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten und für $f, g \in \mathcal{P}_4$ sei gemäß $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{P}_4$ definiert. Bestimmen Sie eine Basis für das orthogonale Komplement der konstanten Polynome.