Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 13.12.2010 in der Vorlesung

Serie 7 (40 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Die Körpererweiterungen $K \subseteq L \subseteq E$ seien vorgelegt. Beweisen Sie, dass die Körpererweiterungen L/K und E/L genau dann algebraisch sind, wenn die Körpererweiterung E/K algebraisch ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien E/K eine endliche Körpererweiterung und $\alpha \in E$. Weiter bezeichne $\varphi_\alpha : E \longrightarrow E$ den K-linearen Endomorphismus von E, der durch $\varphi_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$ $(\beta \in E)$ gegeben ist. Zeigen Sie:

(i) Das Minimalpolynom m_{φ_α} der linearen Abbildung φ_α ist gleich dem Minimalpolynom $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ von α über K.

(ii) Bestimmen Sie für $K := \mathbb{Q}$ und $E := \mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{7}\big)$ das Minimalpolynom $\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ von $\alpha := \sqrt[3]{7} + \big(\sqrt[3]{7}\big)^2$, indem Sie das Minimalpolynom m_{φ_α} mit Hilfe des charakteristischen Polynoms zu φ_α bestimmen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei E der Erweiterungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7})$ von $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie ein $\vartheta \in E$ mit der Eigenschaft $E = \mathbb{Q}(\vartheta)$.
(*Hinweis:* Benutzen Sie zur Konstruktion von ϑ das im Beweis des Satzes vom primitiven Element angegebene Verfahren.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Eine Einheitsstrecke sei vorgelegt. Zeigen Sie, dass eine Strecke der Länge α genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn eine endliche, aufsteigende Kette von Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n$$

mit $[K_j : K_{j-1}] = 2$ $(j = 1, \ldots, n)$ existiert, so dass $\alpha \in K_n$ gilt.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Seien K ein Körper und $f(X) \in K[X]$ ein Polynom. Weiter bezeichne $f'(X)$ die formale Ableitung von $f(X)$. Zeigen Sie:

(i) $f(X)$ ist separabel über K genau dann, wenn $f(X)$ und $f'(X)$ teilerfremd sind, d.h. wenn der größte gemeinsame Teiler $\big(f(X), f'(X)\big)$ eine Einheit in $K[X]$ ist.

(ii) Falls $f(X)$ zudem irreduzibel ist, dann ist $f(X)$ separabel über K genau dann, wenn $f'(X)$ nicht das Nullpolynom ist.