HU Berlin Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 30.05.2011 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 7 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Folgern Sie aus dem Satz von Lagrange, dass in einer endlichen Gruppe die Ordnung eines Elements stets ein Teiler der Gruppenordnung ist.

(b) Schließen Sie daraus, dass eine Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist.

(c) Bestimmen Sie alle möglichen Gruppen der Ordnungen 5, 6 und 7 bis auf Gruppenisomorphie unter Verwendung von (a) und (b).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Das Zentrum $Z(G) := \{z \in G \mid g \circ z = z \circ g,\ \forall g \in G\}$ ist ein Normalteiler in G.

(b) Welche der Untergruppen von S_3 sind Normalteiler?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe vom Index 2.

(a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler in G ist.

(b) Geben Sie einen surjektiven Homomorphismus von G nach der zyklischen Gruppe mit zwei Elementen an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei D_{2n} die aus Serie 4, Aufgabe 3, bekannte Diedergruppe.

(a) Es sei b die Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$. Zeigen Sie, dass die Menge der Drehungen $B := \{b^k \mid k = 0, \ldots, n-1\}$ eine Untergruppe, ja sogar ein Normalteiler in D_{2n} ist.

(b) Bestimmen Sie die Menge der Linksnebenklassen D_{2n}/B.

(c) In Serie 4, Aufgabe 3, wurde bewiesen, dass jedes Element von D_{2n} eindeutig in der Form $a^l \circ b^k$ mit $l \in \{0, 1\}$ und $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ darstellbar ist (hierbei ist $a \in D_{2n}$ eine Spiegelung). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\operatorname{sgn} : (D_{2n}, \circ) \longrightarrow (\mathcal{R}_2, \oplus),$$

gegeben durch die Zuordnung $a^l \circ b^k \mapsto l$, ein Gruppenhomomorphismus ist, und berechnen Sie Kern und Bild von sgn.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G. Für eine nicht-leere Menge X bzw. eine nicht-leere Teilmenge $Y \subseteq X$ bezeichne $G^X := \operatorname{Abb}(X, G)$ bzw. $G^Y := \operatorname{Abb}(Y, G)$ die Menge der Abbildungen von X bzw. Y nach G.

(a) Wir definieren eine Verknüpfung $\star$ auf G^X gemäß

$$(f_1 \star f_2)(x) := f_1(x) \circ f_2(x) \qquad (f_1, f_2 \in G^X; x \in X).$$

Zeigen sie, dass $(G^X, \star)$ eine Gruppe ist. Zeigen Sie weiter, dass G^X genau dann abelsch ist, wenn G abelsch ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$N := \{f \in G^X \mid f(y) = e_G, \ \forall\, y \in Y\}$$

ein Normalteiler in G^X ist.

(c) Zeigen Sie, dass

$$G^X/N \simeq G^Y$$

gilt.