

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Dr. Anna v. Pippich

Abgabetermin: 27.05.2013 vor der Vorlesung

Bitte beachten:

JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.

JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 7 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei S_n die symmetrische Gruppe. Wir erinnern daran, dass jede Permutation $\pi \in S_n$ durch Transpositionen dargestellt werden kann und dass die Anzahl der auftretenden Transpositionen entweder immer gerade oder immer ungerade ist. Damit definieren wir die Abbildung

$$f : (S_n, \circ) \longrightarrow (\mathcal{R}_2, \oplus)$$

dadurch, dass wir π die 0 (bzw. 1) zuordnen, wenn die Anzahl der darstellenden Transpositionen gerade (bzw. ungerade) ist.

- (a) Zeigen Sie, dass f ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Gruppenisomorphie

$$(S_n/A_n, \bullet) \cong (\mathcal{R}_2, \oplus)$$

besteht. Hierbei bezeichnet A_n die n -te *alternierende Gruppe*, d.h. die Untergruppe derjenigen Permutationen von S_n , welche durch eine gerade Anzahl von Transpositionen dargestellt werden können.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe vom Index 2.

- (a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler in G ist.
- (b) Geben Sie einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von G nach der Gruppe $(\mathcal{R}_2, \oplus)$ an.
- (c) Zeigen Sie, dass die Gruppenisomorphie

$$(G/H, \bullet) \cong (\mathcal{R}_2, \oplus)$$

besteht.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Führen Sie die Konstruktion des *Satzes zur Konstruktion von Gruppen aus regulären Halbgruppen* für das kommutative und reguläre Monoid $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ durch: Beschreiben Sie die Äquivalenzrelation, die Elemente und die Gruppenstruktur der konstruierten Gruppe G . Welche Zahlbereichserweiterung liegt G zugrunde?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass durch die Zuordnung $a \mapsto R_n(a)$ ($a \in \mathbb{Z}$) ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathcal{R}_n, \oplus)$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$n\mathbb{Z} = \{\dots, -3n, -2n - n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$$

ein Normalteiler von $\mathbb{Z}$ ist, indem Sie $\ker(f) = n\mathbb{Z}$ nachweisen.

(c) Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Beschreiben Sie die Nebenklasse von m bzgl. $n\mathbb{Z}$ und geben Sie die Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ an.

(d) Zeigen Sie, dass die Gruppenisomorphie

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \bullet) \cong (\mathcal{R}_n, \oplus)$$

besteht.