

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 01.06.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten:

JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.

JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 7 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- (a) Zeigen Sie: Ist $f : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq H$ ein Normalteiler in H , so ist das Urbild $f^{-1}(N)$ von N unter f ein Normalteiler in G .
- (b) Betrachten Sie die Untergruppe $U := \{d^0, d^2, s_2, s_4\} \leq D_8$, die die Identität, die Drehung um den Winkel π und die Spiegelungen s_2, s_4 an den beiden Seitenhalbierenden des Quadrats enthält. Stellen Sie die Gruppentafel von U auf. Verwenden Sie (a), um zu zeigen, dass U ein Normalteiler in D_8 ist, indem Sie einen geeigneten Gruppenhomomorphismus $f : D_8 \rightarrow S_4$ angeben.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

- (a) Gegeben sei die Untergruppe $N := \{0, 4\} \leq (\mathcal{R}_8, \oplus)$. Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler in (\mathcal{R}_8, \oplus) ist und verifizieren Sie die Isomorphie $(\mathcal{R}_8/N, \oplus) \cong (\mathcal{R}_4, \oplus)$.
- (b) Zeigen Sie allgemein: Es seien m, n, r natürliche Zahlen mit $r = m \cdot n$. Dann gibt es einen Normalteiler $N \trianglelefteq (\mathcal{R}_r, \oplus)$ mit $N \cong (\mathcal{R}_n, \oplus)$, und es gilt die Isomorphie $(\mathcal{R}_r/N, \oplus) \cong (\mathcal{R}_m, \oplus)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei (G, \circ) eine Gruppe mit neutralem Element e . Für eine nicht-leere Menge X bzw. eine nicht-leere Teilmenge $Y \subseteq X$ bezeichne $G^X := \text{Abb}(X, G)$ bzw. $G^Y := \text{Abb}(Y, G)$ die Menge der Abbildungen von X bzw. Y nach G .

- (a) Wir definieren eine Verknüpfung \star auf G^X gemäß

$$(f_1 \star f_2)(x) := f_1(x) \circ f_2(x) \quad (x \in X; f_1, f_2 \in G^X).$$

Zeigen sie, dass (G^X, \star) eine Gruppe ist. Zeigen Sie weiter, dass G^X genau dann abelsch ist, wenn G abelsch ist.

- (b) Zeigen Sie, dass

$$N := \{f \in G^X \mid f(y) = e \quad \forall y \in Y\}$$

in G^X Normalteiler ist.

- (c) Zeigen Sie, dass $G^X/N \cong G^Y$ gilt.