Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 14.06.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 8 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3+4i & 0 \\ 3-4i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$$

gegeben. Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $S \in \mathrm{U}_3(\mathbb{C})$, so dass $\overline{S}^t AS$ Diagonalgestalt besitzt.

(b) Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ sei mit dem Skalarprodukt

$$\langle p(X), q(X) \rangle := \int_{-1}^{1} p(X)q(X)\,dX \quad (p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 1})$$

versehen. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}[X]_{\leq 1})$, gegeben durch die Zuordnung

$$p(X) \mapsto p(1)(3X+1),$$

bezüglich dieses Skalarprodukts selbstadjungiert ist und bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$, bezüglich der die Matrix von f Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es seien $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{L}(V)$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Ist $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$, ist f also längentreu, so ist f bereits unitär.

(b) Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt und die Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
Zeigen Sie, dass die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der Matrix $\overline{A}^t A$ reell und nicht-negativ sind,

also in der Form $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ angeordnet werden können.
Zeigen Sie weiter, dass für alle $x \in \mathbb{C}^n$ die Ungleichungen

$$\sqrt{\lambda_1}\|x\| \leq \|Ax\| \leq \sqrt{\lambda_n}\|x\|$$

bestehen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Eine hermitesche Matrix $P \in \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$ heißt *positiv definit*, falls für alle $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ die Bedingung $\overline{x}^t P x > 0$ erfüllt ist.
Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ und $P \in \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$, P positiv definit, existieren, so dass A als Produkt

$$A = UP$$

geschrieben werden kann. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Bestimmen Sie $S \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ und $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ diagonal und positiv definit, so dass $\overline{A}^t A = \overline{S}^t D^2 S$ gilt.

(b) Setzen Sie $P := \overline{S}^t DS$ und zeigen Sie, dass P hermitesch und positiv definit ist.

(c) Bestimmen Sie U derart, dass $A = UP$ gilt, und zeigen Sie, dass U unitär ist.

Bemerkung: Dies ist eine Verallgemeinerung der Polarzerlegung für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ als $z = e^{i\varphi} r$ ($\varphi \in [0, 2\pi)$, $r > 0$).